Κεφάλαιο 5

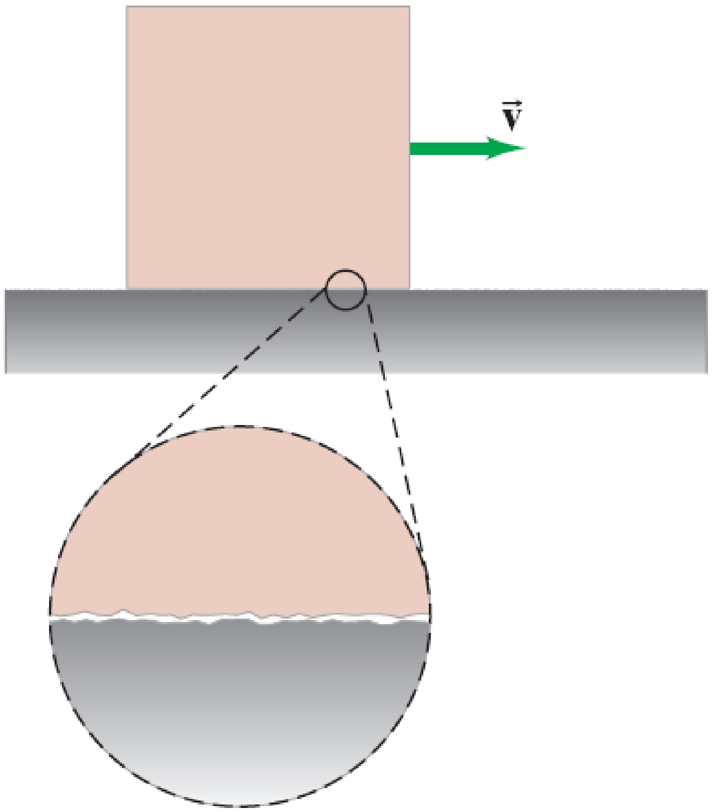
Εφαρμογές των Νόμων του Νεύτωνα: Τριβή, Κυκλική Κίνηση, Ελκτικές Δυνάμεις

Περιεχόμενα Κεφαλαίου 5

- Εφαρμογές Τριβής
- Ομοιόμορφη Κυκλική Κίνηση
- Δυναμική Κυκλικής Κίνησης
- Οι κλήσεις στους αυτοκινητόδρομους

5-1 Τριβή

Η τριβή είναι πάντα παρούσα όταν δύο επιφάνειες βρίσκονται σε «επαφή»



Οι μικροσκοπικές λεπτομέρειες της τριβής παραμένουν ακόμα θολές.

5-1 Εφαρμογές τριβής

Κατά προσέγγιση η τριβή κίνησης δίδεται από την σχέση:

$$F_{\mathrm{fr}} = \mu_{\mathrm{k}} F_{\mathrm{N}} .$$

όπου, F_{N} είναι η κάθετη δύναμη και μ_{k} ο συντελεστής της τριβής κίνησης, ο οποίος και διαφέρει για διαφορετικά ζευγάρια επιφανειών.

Στατική Τριβή έχουμε όταν οι επιφάνειες είναι ακίνητες (μεταξύ τους), όπως π.χ. ένα βιβλίο που στέκεται πάνω σε ένα τραπέζι.

Η στατική δύναμη τριβή είναι τόση όση απαιτείται για να μην έχουμε ολίσθηση μεταξύ των επιφανειών.

$$F_{\mathrm{fr}} \leq \mu_{\mathrm{s}} F_{\mathrm{N}} \, .$$

Συνήθως είναι ευκολότερο να διατηρήσουμε την ολίσθηση ενός αντικειμένου από το να το θέσουμε σε κίνηση.

Γενικά, $\mu_s > \mu_k$.

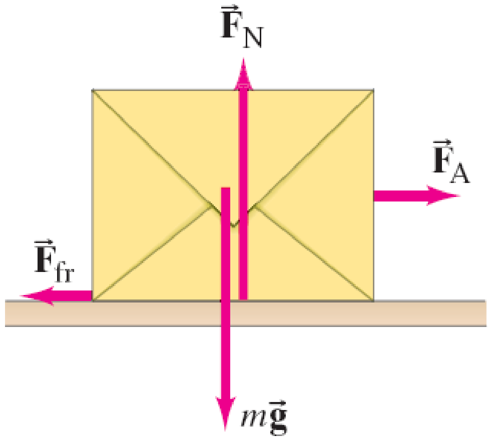
TABLE 5–1 Coefficients of Friction†

Surfaces	Coefficient of Static Friction, μ_s	Coefficient of Kinetic Friction, μ_k
Wood on wood	0.4	0.2
Ice on ice	0.1	0.03
Metal on metal (lubricated)	0.15	0.07
Steel on steel (unlubricated)	0.7	0.6
Rubber on dry concrete	1.0	0.8
Rubber on wet concrete	0.7	0.5
Rubber on other solid surfaces	1–4	1
Teflon® on Teflon in air	0.04	0.04
Teflon on steel in air	0.04	0.04
Lubricated ball bearings	<0.01	<0.01
Synovial joints (in human limbs)	0.01	0.01

†Values are approximate and intended only as a guide.

Το γνωστό κουτί των 10.0-kg παραμένει ακίνητο πάνω στο πάτωμα. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι 0,40 και αυτός της κινητικής τριβής 0,30. Βρείτε την τριβή εάν η οριζόντια δύναμη που εφαρμόζεται στο κουτί έχει μέγεθος :

(a) 0, (b) 10 N, (c) 20 N, (d) 38 N, and (e) 40 N.



SOLUTION The free-body diagram of the box is shown in Fig. 5–2. In the vertical direction there is no motion, so Newton's second law in the vertical direction gives $\Sigma F_y = ma_y = 0$, which tells us $F_N - mg = 0$. Hence the normal force is

$$F_N = mg = (10.0\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 98.0\,\text{N}.$$

(*a*) Because $F_A = 0$ in this first case, the box doesn't move, and $F_{fr} = 0$.
(*b*) The force of static friction will oppose any applied force up to a maximum of

$$\mu_s F_N = (0.40)(98.0\,\text{N}) = 39\,\text{N}.$$

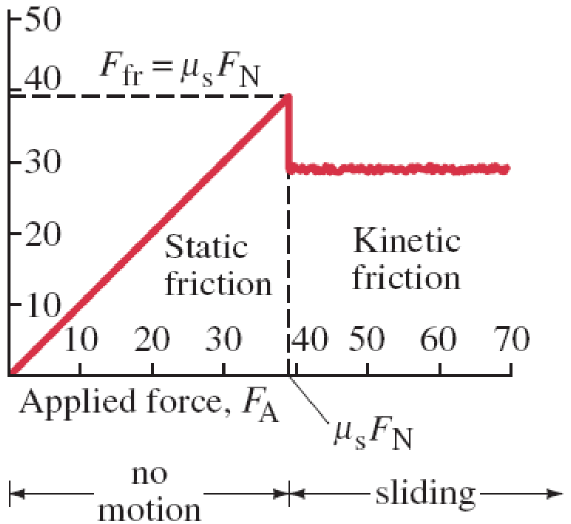
When the applied force is $F_A = 10\,\text{N}$, the box will not move. Newton's second law gives $\Sigma F_x = F_A - F_{fr} = 0$, so $F_{fr} = 10\,\text{N}$.
(*c*) An applied force of 20 N is also not sufficient to move the box. Thus $F_{fr} = 20\,\text{N}$ to balance the applied force.
(*d*) The applied force of 38 N is still not quite large enough to move the box; so the friction force has now increased to 38 N to keep the box at rest.
(*e*) A force of 40 N will start the box moving since it exceeds the maximum force of static friction, $\mu_s F_N = (0.40)(98\,\text{N}) = 39\,\text{N}$. Instead of static friction, we now have kinetic friction, and its magnitude is

$$F_{fr} = \mu_k F_N = (0.30)(98.0\,\text{N}) = 29\,\text{N}.$$

There is now a net (horizontal) force on the box of magnitude $F = 40\,\text{N} - 29\,\text{N} = 11\,\text{N}$, so the box will accelerate at a rate

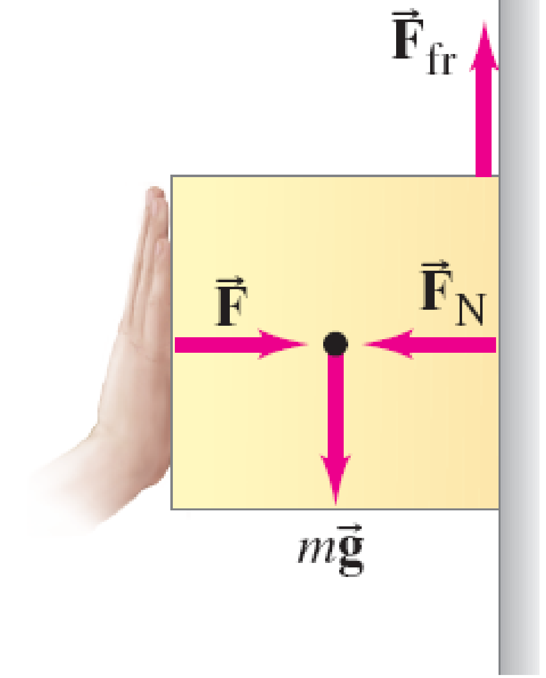
$$a_x = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{11\,\text{N}}{10.0\,\text{kg}} = 1.1\,\text{m/s}^2$$

as long as the applied force is 40 N. Figure 5–3 shows a graph that summarizes this Example.



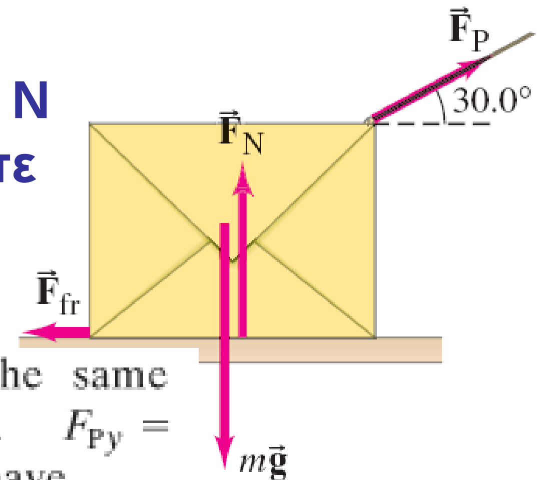
Co

Μπορούμε να αποτρέψουμε ένα αντικείμενο σε επαφή με ένα κατακόρυφο τοίχο ασκώντας πάνω του οριζόντια δύναμη; Γιατί;



ΝΑΙ, διότι η δύναμη τριβής είναι κατακόρυφη!

Ένα κουτί 10.0-kg σύρεται οριζοντίως με δύναμη 40.0 N σε γωνία 30.0° πάνω από το οριζόντιο επίπεδο. Βρείτε την επιτάχυνση εάν ο συντελεστής τριβής είναι 0,30.



SOLUTION The calculation for the vertical (y) direction is just the same as in Example 4–11, $mg = (10.0\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 98.0\,\text{N}$ and $F_{Py} = (40.0\,\text{N})(\sin 30.0°) = 20.0\,\text{N}$. With y positive upward and $a_y = 0$, we have

$$F_N - mg + F_{Py} = ma_y$$
$$F_N - 98.0\,\text{N} + 20.0\,\text{N} = 0,$$

so the normal force is $F_N = 78.0\,\text{N}$. Now we apply Newton's second law for the horizontal (x) direction (positive to the right), and include the friction force:

$$F_{Px} - F_{fr} = ma_x.$$

The friction force is kinetic as long as $F_{fr} = \mu_k F_N$ is less than $F_{Px} = (40.0\,\text{N})\cos 30.0° = 34.6\,\text{N}$, which it is:

$$F_{fr} = \mu_k F_N = (0.30)(78.0\,\text{N}) = 23.4\,\text{N}.$$

Hence the box does accelerate:

$$a_x = \frac{F_{Px} - F_{fr}}{m} = \frac{34.6\,\text{N} - 23.4\,\text{N}}{10.0\,\text{kg}} = 1.1\,\text{m/s}^2.$$

In the absence of friction, as we saw in Example 4–11, the acceleration would be much greater than this.

NOTE Our final answer has only two significant figures because our least significant input value $(\mu_k = 0.30)$ has two.

Ένας σκιέρ κατεβαίνει πίστα (μαύρη;) 30°, με σταθερή ταχύτητα. Τι μπορούμε να πούμε για το συντελεστή τριβής;

SOLUTION We have to resolve only one vector into components, the weight $\vec{\mathbf{F}}_G$, and its components are shown as dashed lines in Fig. 5–8c:

$$F_{Gx} = mg\sin\theta,$$
$$F_{Gy} = -mg\cos\theta,$$

where we have stayed general by using θ rather than 30° for now. There is no acceleration, so Newton's second law applied to the x and y components gives

$$\Sigma F_y = F_N - mg\cos\theta = ma_y = 0$$
$$\Sigma F_x = mg\sin\theta - \mu_k F_N = ma_x = 0.$$

From the first equation, we have $F_N = mg\cos\theta$. We substitute this into the second equation:

$$mg\sin\theta - \mu_k(mg\cos\theta) = 0.$$

Now we solve for μ_k:

$$\mu_k = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

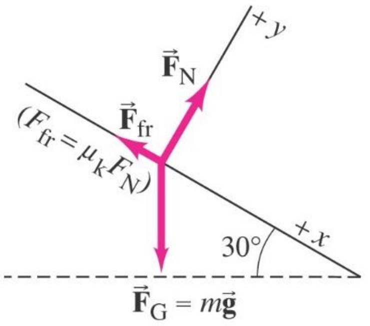
which for $\theta = 30°$ is

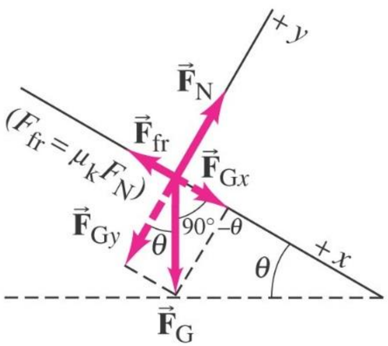
$$\mu_k = \tan\theta = \tan 30° = 0.58.$$

Notice that we could use the equation

$$\mu_k = \tan\theta$$

to determine μ_k under a variety of conditions. All we need to do is observe at what slope angle the skier descends at constant speed. Here is another reason why it is often useful to plug in numbers only at the end: we obtained a general result useful for other situations as well.

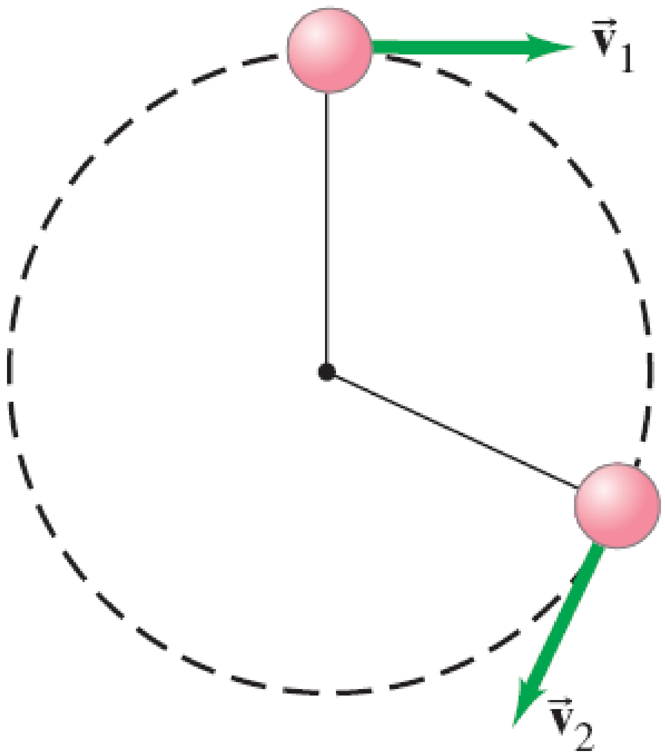




5-2 Κινηματική ομοιόμορφης κυκλικής κίνησης

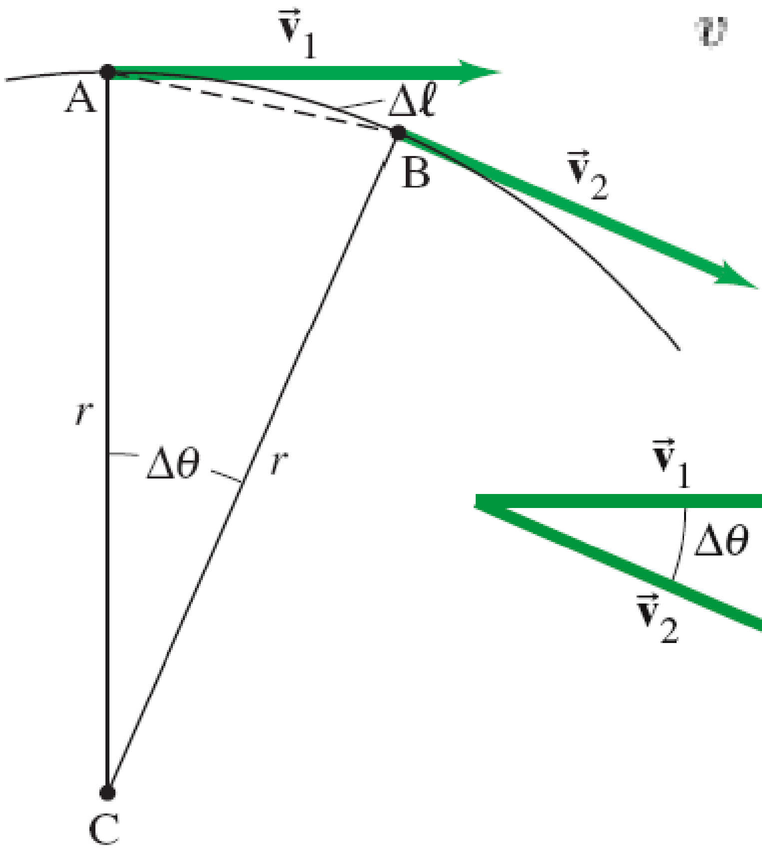
Ομοιόμορφη Κυκλική Κίνηση: κίνηση σε κύκλο με σταθερή ακτίνα και σταθερή ταχύτητα (μέτρο)

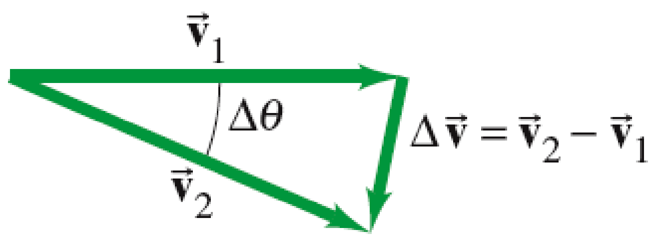
Η στιγμιαία ταχύτητα είναι πάντοτε εφαπτόμενη στο κύκλο (κάθετη στην ακτίνα)

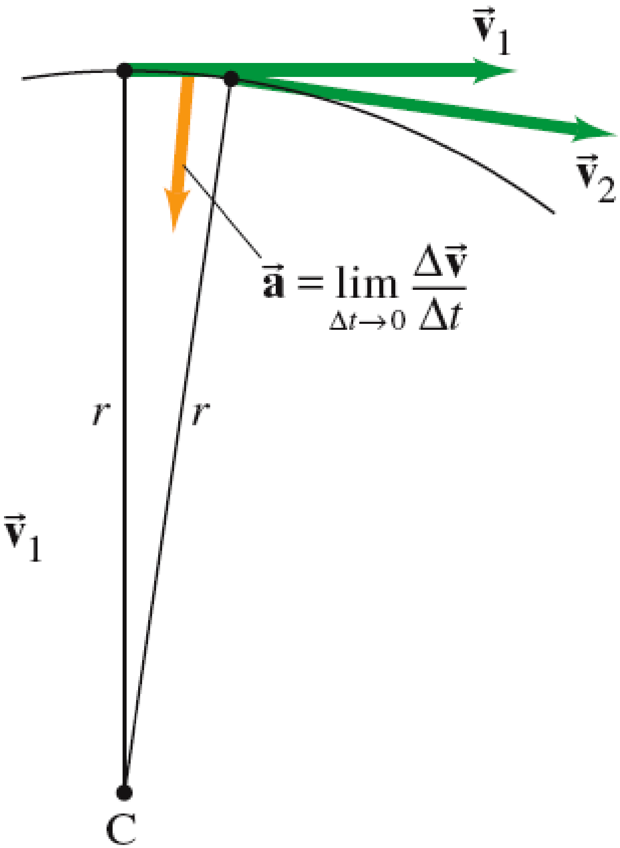


Για απειροελάχιστους χρόνους παρατηρούμε ότι η γωνιακή ταχύτητα και επιτάχυνση δίδονται από την σχέση

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

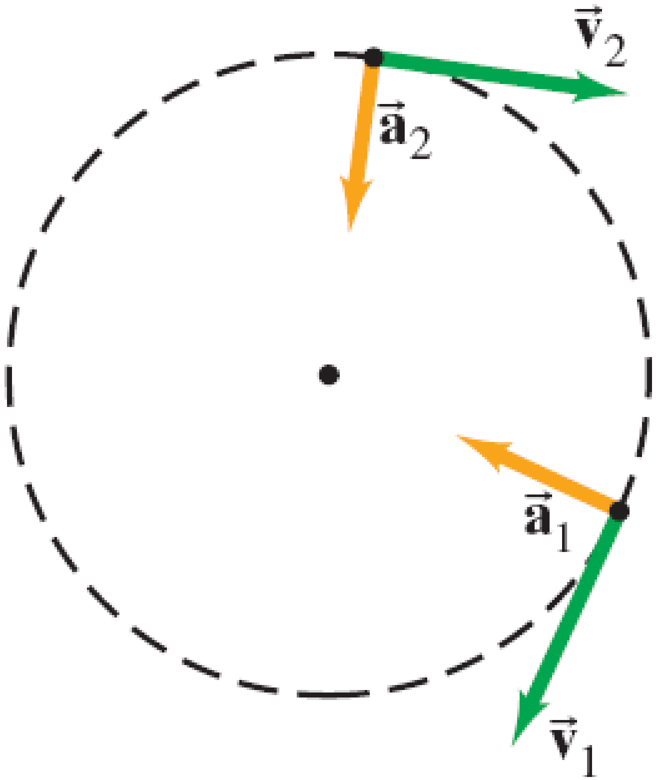




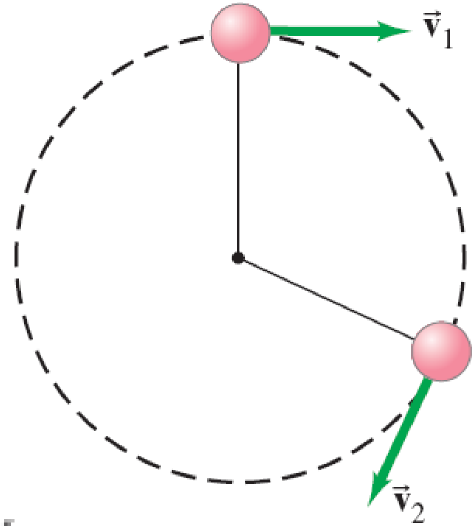


Η επιτάχυνση ονομάζεται κεντρομόλος ή ακτινική, γιατί έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου.

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$



Μία μπάλα 150-g δεμένη στην άκρη ενός σκοινιού περιστρέφεται ομοιόμορφα σε οριζόντιο επίπεδο ακτίνας 0,600 m. Η μπάλα περιστρέφεται με ρυθμό δύο περιστροφών ανά δευτερόλεπτο. Βρείτε την κεντρομόλο επιτάχυνση



SOLUTION If the ball makes two complete revolutions per second, then the ball travels in a complete circle in a time interval equal to 0.500 s, which is its period T. The distance traveled in this time is the circumference of the circle, $2\pi r$, where r is the radius of the circle. Therefore, the ball has speed

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(0.600\ \mathrm{m})}{(0.500\ \mathrm{s})} = 7.54\ \mathrm{m/s}.$$

The centripetal acceleration† is

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(7.54\ \mathrm{m/s})^2}{(0.600\ \mathrm{m})} = 94.7\ \mathrm{m/s^2}.$$

Το Φεγγάρι κάνει κύκλο γύρω από την Γη σε ακτίνα περίπου 384.000 km και περίοδο *T*=27,3 μέρες. Βρείτε την επιτάχυνση του φεγγαριού από την Γη.

SOLUTION In one orbit around the Earth, the Moon travels a distance $2\pi r$, where $r = 3.84 \times 10^8\,\mathrm{m}$ is the radius of its circular path. The time required for one complete orbit is the Moon's period of 27.3 d. The speed of the Moon in its orbit about the Earth is $v = 2\pi r/T$. The period T in seconds is $T = (27.3\,\mathrm{d})(24.0\,\mathrm{h/d})(3600\,\mathrm{s/h}) = 2.36 \times 10^6\,\mathrm{s}$. Therefore,

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(3.84 \times 10^8\,\mathrm{m})}{(2.36 \times 10^6\,\mathrm{s})^2}$$

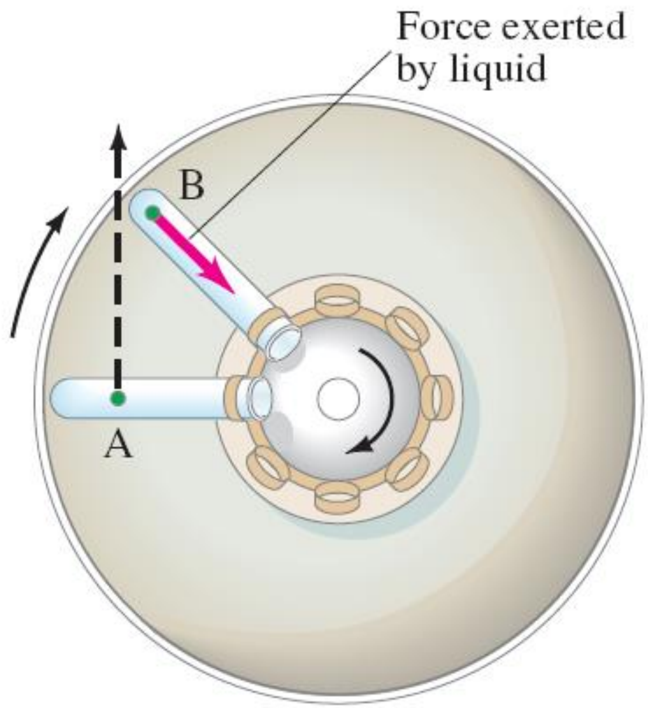
$$= 0.00272\,\mathrm{m/s^2} = 2.72 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}.$$

We can write this acceleration in terms of $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$ (the acceleration of gravity at the Earth's surface) as

$$a = 2.72 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}\left(\frac{g}{9.80\,\mathrm{m/s^2}}\right) = 2.78 \times 10^{-4} g.$$

NOTE The centripetal acceleration of the Moon, $a = 2.78 \times 10^{-4}\,g$, is *not* the acceleration of gravity for objects at the Moon's surface due to the Moon's gravity. Rather, it is the acceleration due to the *Earth's* gravity for any object (such as the Moon) that is 384,000 km from the Earth. Notice how small this acceleration is compared to the acceleration of objects near the Earth's surface.

Η λειτουργία της φυγοκέντρου βασίζεται στη γρήγορη περιστροφή. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μεγάλη «φυγόκεντρος» δύναμη, που στην ουσία δημιουργεί επιτάχυνση μέσα στους δοκιμαστικούς σωλήνες πολύ μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας, επιτυγχάνοντας έτσι την «καθίζηση» πολύ γρηγορότερα.



Μια «υπέρ-φυγόκετρος» περιστρέφεται με 50,000 rpm (revolutions per minute, περιστροφές το λεπτό). Ένα σωματίδιο στην κορυφή του δοκιμαστικού σωλήνα στα 6,00 cm από τον άξονα περιστροφής. Βρείτε την επιτάχυνση σαν ποσοστό του "*g*"

SOLUTION The test tube makes 5.00×10^4 revolutions each minute, or, dividing by 60 s/min, 833 rev/s. The time to make one revolution, the period T, is

$$T = \frac{1}{(833\ \mathrm{rev/s})} = 1.20 \times 10^{-3}\ \mathrm{s/rev}.$$

At the top of the tube, a particle revolves in a circle of circumference $2\pi r = (2\pi)(0.0600\ \mathrm{m}) = 0.377\ \mathrm{m}$ per revolution. The speed of the particle is then

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \left(\frac{0.377\ \mathrm{m/rev}}{1.20 \times 10^{-3}\ \mathrm{s/rev}}\right) = 3.14 \times 10^2\ \mathrm{m/s}.$$

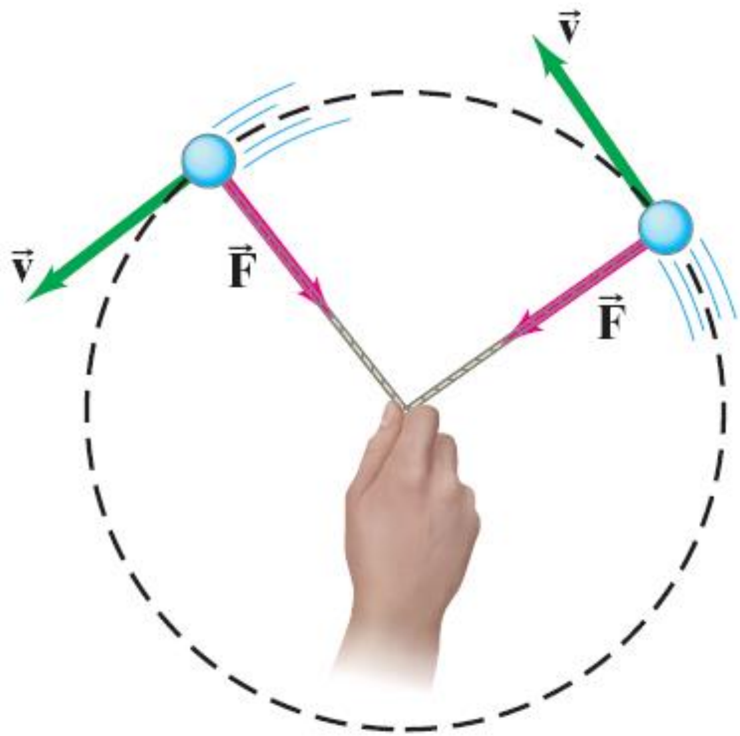
The centripetal acceleration is

$$a_{\mathrm{R}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(3.14 \times 10^2\ \mathrm{m/s})^2}{0.0600\ \mathrm{m}} = 1.64 \times 10^6\ \mathrm{m/s^2},$$

which, dividing by $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$, is 1.67×10^5 g's = 167,000 g's.

5-3 Δυναμική Ομοιόμορφης Κυκλικής Κίνησης

Η ομοιόμορφη κυκλική κίνησης ενός αντικειμένου προϋποθέτει την άσκηση κάποιας «συνολικής» δύναμης πάνω του.

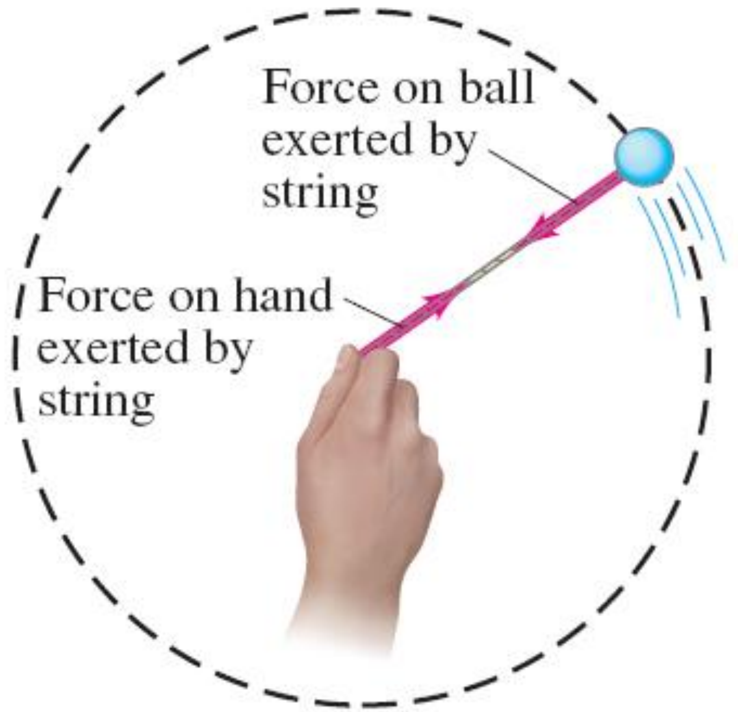


Επειδή ήδη γνωρίζουμε τη γωνιακή επιτάχυνση γράφουμε:

$$\Sigma F_R = ma_R = m\frac{v^2}{r}.$$

5-3 Δυναμική Ομοιόμορφης Κυκλικής Κίνησης

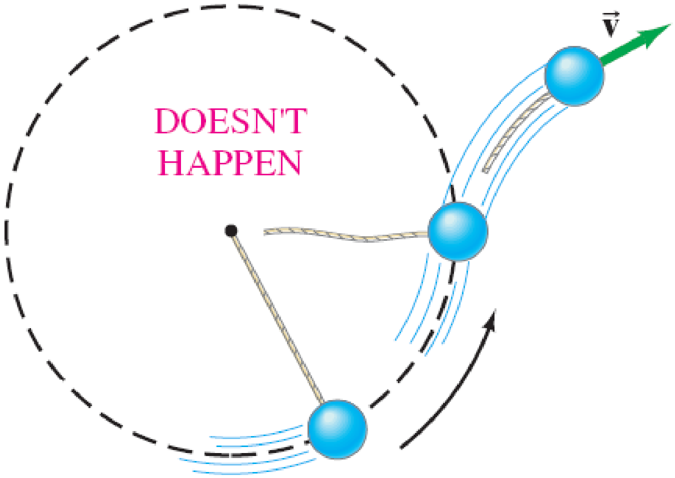
Παρατηρούμε ότι η δύναμη έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου κίνησης. (Με τα σκοινιά μόνο έλξη μπορούμε να εφαρμόσουμε)

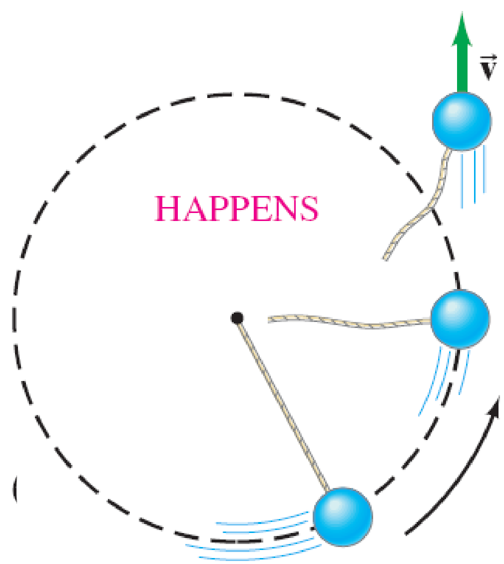


5-3 Δυναμική Ομοιόμορφης Κυκλικής Κίνησης

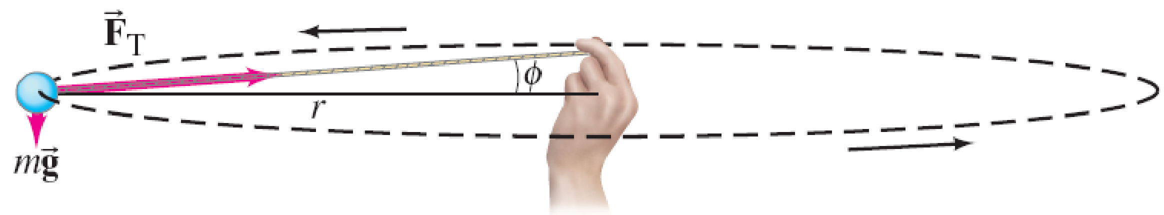
Η κεντρομόλος δύναμη είναι απαραίτητη προκειμένου να το αντικείμενο να μην κινείται ευθεία.

Όταν παύσει να υπάρχει κεντρομόλος δύναμη (κοπεί το σκοινί) το αντικείμενο συνεχίζει την πορεία του κατά μήκος της εφαπτομένης στο σημείου στο οποίο «κόπηκε» το σκοινί.





Πόση δύναμη πρέπει να ασκηθεί σε μια μπάλα 0.150-kg το ώστε να κινείται οριζοντίως σε κύκλο με ακτίνα 0.600 m. Η μπάλα κάνει 2.00 περιστροφές το δευτερόλεπτο. Αγνοείστε την μάζα του σκοινιού.



SOLUTION We apply Newton's second law to the radial direction, which we assume is horizontal:

$$(\Sigma F)_R = ma_R,$$

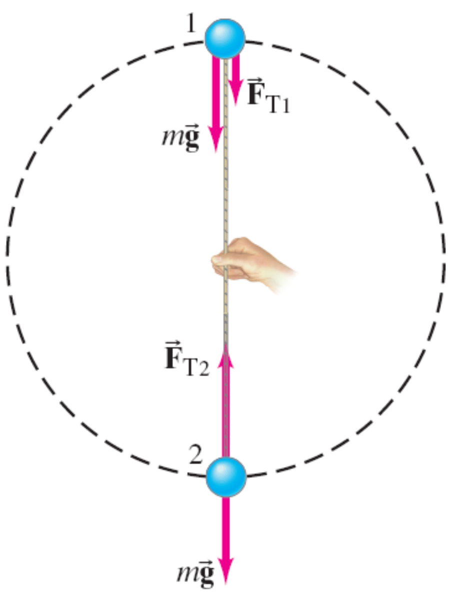
where $a_R = v^2/r$ and $v = 2\pi r/T = 2\pi(0.600\,\text{m})/(0.500\,\text{s}) = 7.54\,\text{m/s}$. Thus

$$F_T = m\frac{v^2}{r} = (0.150\,\text{kg})\frac{(7.54\,\text{m/s})^2}{(0.600\,\text{m})} \approx 14\,\text{N}.$$

NOTE We keep only two significant figures in the answer because we ignored the ball's weight; it is $mg = (0.150\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 1.5\,\text{N}$, about $\frac{1}{10}$ of our result, which is small but not so small as to justify stating a more precise answer for F_T.

NOTE To include the effect of $m\vec{g}$, resolve $\vec{F}_T$ in Fig. 5–17 into components, and set the horizontal component of $\vec{F}_T$ equal to mv^2/r and its vertical component equal to mg.

Μια μπάλα μάζας 0.150-kg στην άκρη ενός σκοινιού μήκους 1.10-m περιστρέφεται σε κατακόρυφο κύκλο. (α) Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει η μπάλα στην κορυφή της κυκλικής διαδρομής για να συνεχίζει να κινείται κυκλικά και (β) υπολογίστε την τάση του σκοινιού στο κάτω μέρος της διαδρομής υποθέτοντας ότι η ταχύτητα είναι διπλάσια από αυτήν του ερωτήματος (α)



SOLUTION (*a*) At the top (point 1), two forces act on the ball: $m\vec{g}$, the force of gravity, and $\vec{F}_{T1}$, the tension force the cord exerts at point 1. Both act downward, and their vector sum acts to give the ball its centripetal acceleration a_R. We apply Newton's second law, for the vertical direction, choosing downward as positive since the acceleration is downward (toward the center):

$$(\Sigma F)_R = ma_R$$

$$F_{T1} + mg = m\frac{v_1^2}{r}. \qquad \text{[at top]}$$

From this equation we can see that the tension force F_{T1} at point 1 will get larger if v_1 (ball's speed at top of circle) is made larger, as expected. But we are asked for the *minimum* speed to keep the ball moving in a circle. The cord will remain taut as long as there is tension in it. But if the tension disappears (because v_1 is too small) the cord can go limp, and the ball will fall out of its circular path. Thus, the minimum speed will occur if $F_{T1} = 0$, for which we have

$$mg = m\frac{v_1^2}{r}. \qquad \text{[minimum speed at top]}$$

We solve for v_1, keeping an extra digit for use in (*b*):

$$v_1 = \sqrt{gr} = \sqrt{(9.80\,\text{m/s}^2)(1.10\,\text{m})} = 3.283\,\text{m/s}.$$

This is the minimum speed at the top of the circle if the ball is to continue moving in a circular path.

(*b*) When the ball is at the bottom of the circle (point 2 in Fig. 5–18), the cord exerts its tension force F_{T2} upward, whereas the force of gravity, $m\vec{g}$, still acts downward. Choosing *upward* as positive, Newton's second law gives:

$$(\Sigma F)_R = ma_R$$

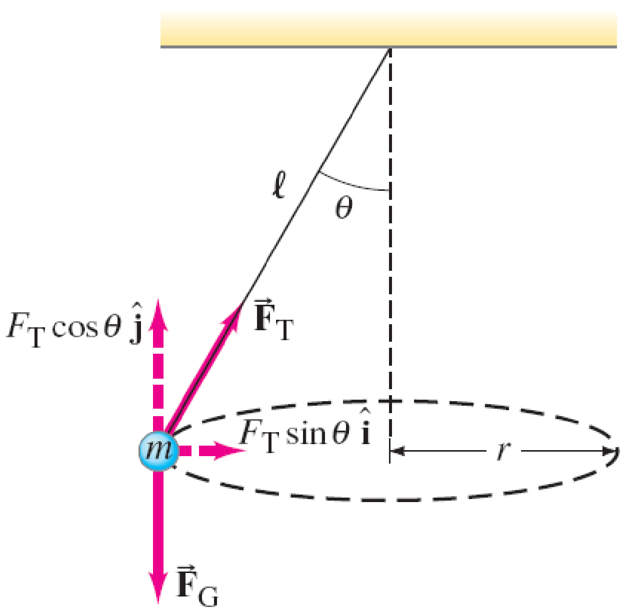
$$F_{T2} - mg = m\frac{v_2^2}{r}. \qquad \text{[at bottom]}$$

The speed v_2 is given as twice that in (*a*), namely 6.566 m/s. We solve for F_{T2}:

$$F_{T2} = m\frac{v_2^2}{r} + mg$$

$$= (0.150\,\text{kg})\frac{(6.566\,\text{m/s})^2}{(1.10\,\text{m})} + (0.150\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 7.35\,\text{N}.$$

Μια μικρή μπάλα μάζας m, κρέμεται από σκοινί μήκους l, περιστρέφεται σε κύκλο με ακτίνα $r = l \sin\theta$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει το σκοινί με την κατακόρυφο. (α) Ποια η γωνία της επιτάχυνσης της μπάλας και τι την προκαλεί; (b) Βρείτε την ταχύτητα και περίοδο περιστροφής (στροφές το δευτερόλεπτο) σαν συνάρτηση των l, θ, g, και m.



APPROACH We can answer (*a*) by looking at Fig. 5–20, which shows the forces on the revolving ball at one instant: the acceleration points horizontally toward the center of the ball's circular path (not along the cord). The force responsible for the acceleration is the *net* force which here is the vector sum of the forces acting on the mass m: its weight $\vec{\mathbf{F}}_G$ (of magnitude $F_G = mg$) and the force exerted by the tension in the cord, $\vec{\mathbf{F}}_T$. The latter has horizontal and vertical components of magnitude $F_T \sin\theta$ and $F_T \cos\theta$, respectively.

SOLUTION (*b*) We apply Newton's second law to the horizontal and vertical directions. In the vertical direction, there is no motion, so the acceleration is zero and the net force in the vertical direction is zero:

$$F_T \cos\theta - mg = 0.$$

In the horizontal direction there is only one force, of magnitude $F_T \sin\theta$, that acts toward the center of the circle and gives rise to the acceleration v^2/r. Newton's second law tells us:

$$F_T \sin\theta = m\frac{v^2}{r}.$$

We solve the second equation for v, and substitute for F_T from the first equation (and use $r = \ell \sin\theta$):

$$v = \sqrt{\frac{rF_T \sin\theta}{m}} = \sqrt{\frac{r}{m}\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{\ell g \sin^2\theta}{\cos\theta}}.$$

The period T is the time required to make one revolution, a distance of $2\pi r = 2\pi\ell \sin\theta$. The speed v can thus be written $v = 2\pi\ell\sin\theta/T$; then

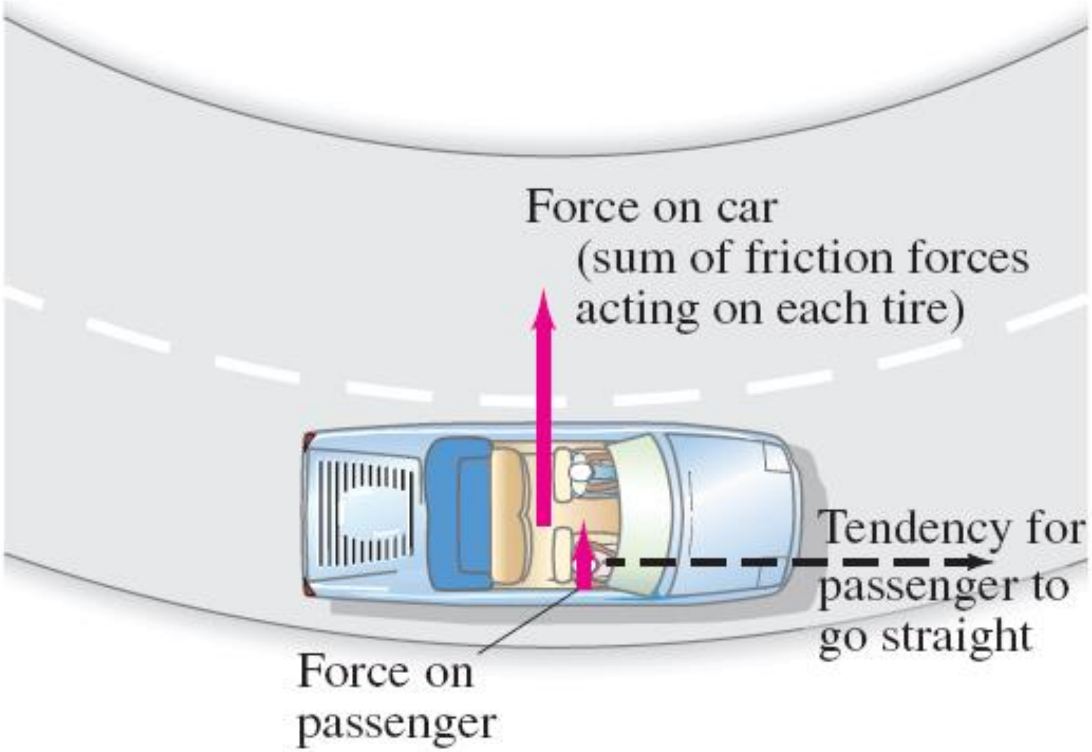
$$T = \frac{2\pi\ell\sin\theta}{v} = \frac{2\pi\ell\sin\theta}{\sqrt{\dfrac{\ell g \sin^2\theta}{\cos\theta}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}}.$$

NOTE The speed and period do not depend on the mass m of the ball. They do

5-4 Κλίσεις αυτοκινητόδρομών

Για να μπορέσει ένα αυτοκίνητο στρίψει απαιτείται κεντρομόλος δύναμη. Για επίπεδους δρόμους η δύναμη αυτή προέρχεται από την τριβή

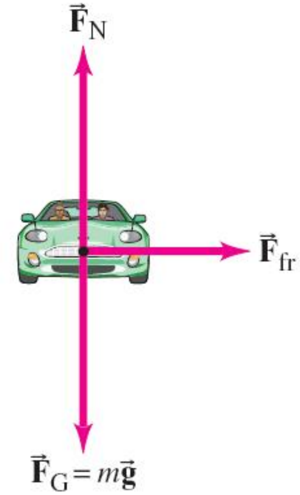


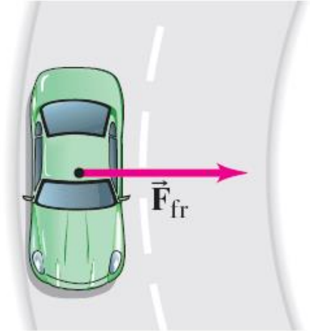
Εάν η τριβή δεν είναι επαρκής, το αυτοκίνητο θα συνεχίσει ευθεία όπως δείχνουν και τα σημάδια στο δρόμο

Εφόσον τα λάστιχα δεν γλιστρούν η τριβή είναι στατική. Όταν όμως αρχίσουν χάνουν πρόσφυση η τριβή είναι κινητική και έχει δύο μειονεκτήματα:

1. **Η κινητική τριβή είναι μικρότερη από την στατική.**
2. **Η στατική τριβή έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου ενώ η κινητική είναι αντίθετη στην φορά κίνησης κάνοντας έτσι αδύνατο το έλεγχο του αυτοκινήτου.**

Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000-kg επιχειρεί στροφή με ακτίνα 50 m σε επίπεδο οδόστρωμα με ταχύτητα 15 m/s (54 km/h). Θα τα καταφέρει η θα «γλιστρήσει»; Υποθέστε (α) στεγνό οδόστρωμα με συντελεστή στατικής τριβής μ_s = 0.60 και (β) παγωμένο οδόστρωμα με μ_s = 0.25.





SOLUTION In the vertical direction there is no acceleration. Newton's second law tells us that the normal force F_N on the car is equal to the weight mg:

$$F_N = mg = (1000\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 9800\,\text{N}.$$

In the horizontal direction the only force is friction, and we must compare it to the force needed to produce the centripetal acceleration to see if it is sufficient. The net horizontal force required to keep the car moving in a circle around the curve is

$$(\Sigma F)_R = ma_R = m\frac{v^2}{r} = (1000\,\text{kg})\frac{(15\,\text{m/s})^2}{(50\,\text{m})} = 4500\,\text{N}.$$

Now we compute the maximum total static friction force (the sum of the friction forces acting on each of the four tires) to see if it can be large enough to provide a safe centripetal acceleration. For (*a*), $\mu_s = 0.60$, and the maximum friction force attainable (recall from Section 5–1 that $F_{fr} \leq \mu_s F_N$) is

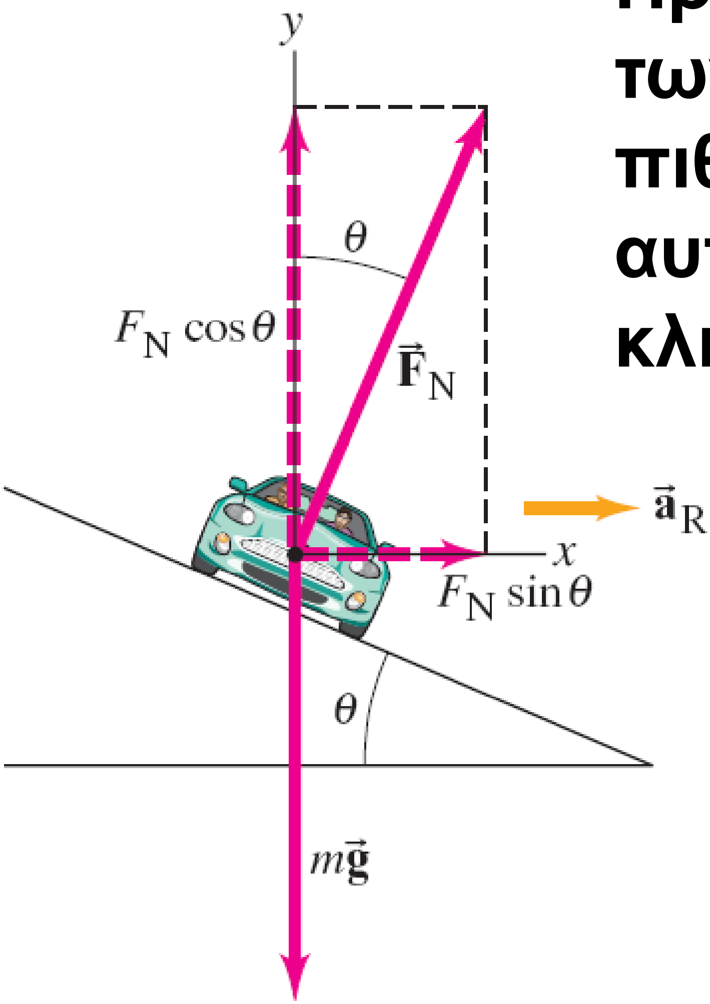
$$(F_{fr})_{max} = \mu_s F_N = (0.60)(9800\,\text{N}) = 5880\,\text{N}.$$

Since a force of only 4500 N is needed, and that is, in fact, how much will be exerted by the road as a static friction force, the car can follow the curve. But in

(*b*) the maximum static friction force possible is

$$(F_{fr})_{max} = \mu_s F_N = (0.25)(9800\,\text{N}) = 2450\,\text{N}.$$

The car will skid because the ground cannot exert sufficient force (4500 N is needed) to keep it moving in a curve of radius 50 m at a speed of 54 km/h.



Προθέτοντας κλίσεις στις στροφές των δρόμων μειώνεται η πιθανότητα να γλιστρήσουν να αυτοκίνητα στις στροφές (όταν οι κλήσεις έχουν την σωστή φορά).

$$F_N \sin\theta = m\frac{v^2}{r}.$$

(α) Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα *v* σε στροφή ακτίνας *r*, βρείτε την εξίσωση της κλίσης που πρέπει να έχει η στροφή ώστε να μην απαιτείται τριβή. (β) Υπολογίστε την κλίση για μια έξοδο ακτίνας 50 μ και όριο ταχύτητας 50 km/h?

SOLUTION (*a*) Since there is no vertical motion, $\Sigma F_y = ma_y$ gives us

$$F_N \cos\theta - mg = 0.$$

Thus,

$$F_N = \frac{mg}{\cos\theta}.$$

[Note in this case that $F_N \geq mg$ since $\cos\theta \leq 1$.]

We substitute this relation for F_N into the equation for the horizontal motion,

$$F_N \sin\theta = m\frac{v^2}{r},$$

and obtain

$$\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

or

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}.$$

This is the formula for the banking angle θ: no friction needed at speed v.

(*b*) For $r = 50\text{ m}$ and $v = 50\text{ km/h}$ (or 14 m/s),

$$\tan\theta = \frac{(14\text{ m/s})^2}{(50\text{ m})(9.8\text{ m/s}^2)} = 0.40,$$

so $\theta = 22°$.