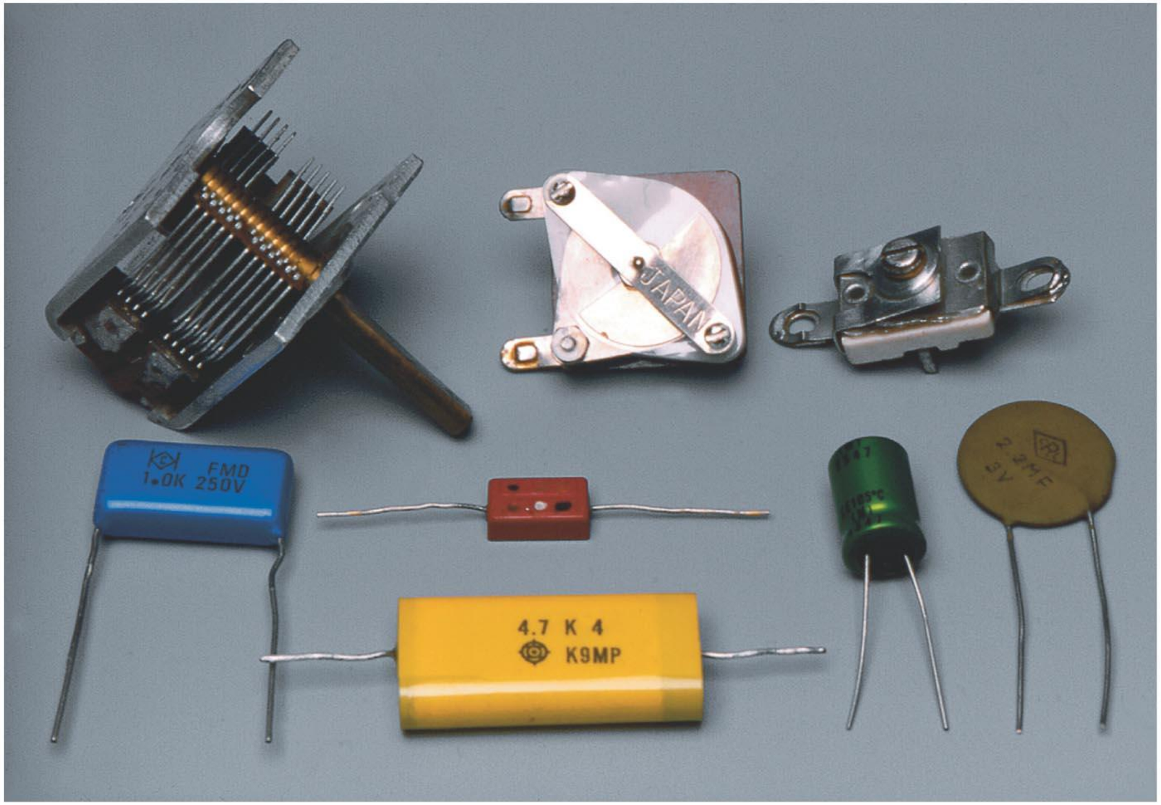
Κεφάλαιο 24
Χωρητικότητα, Διηλεκτρικά, Αποθήκευση Ηλεκτρικής Ενέργειας

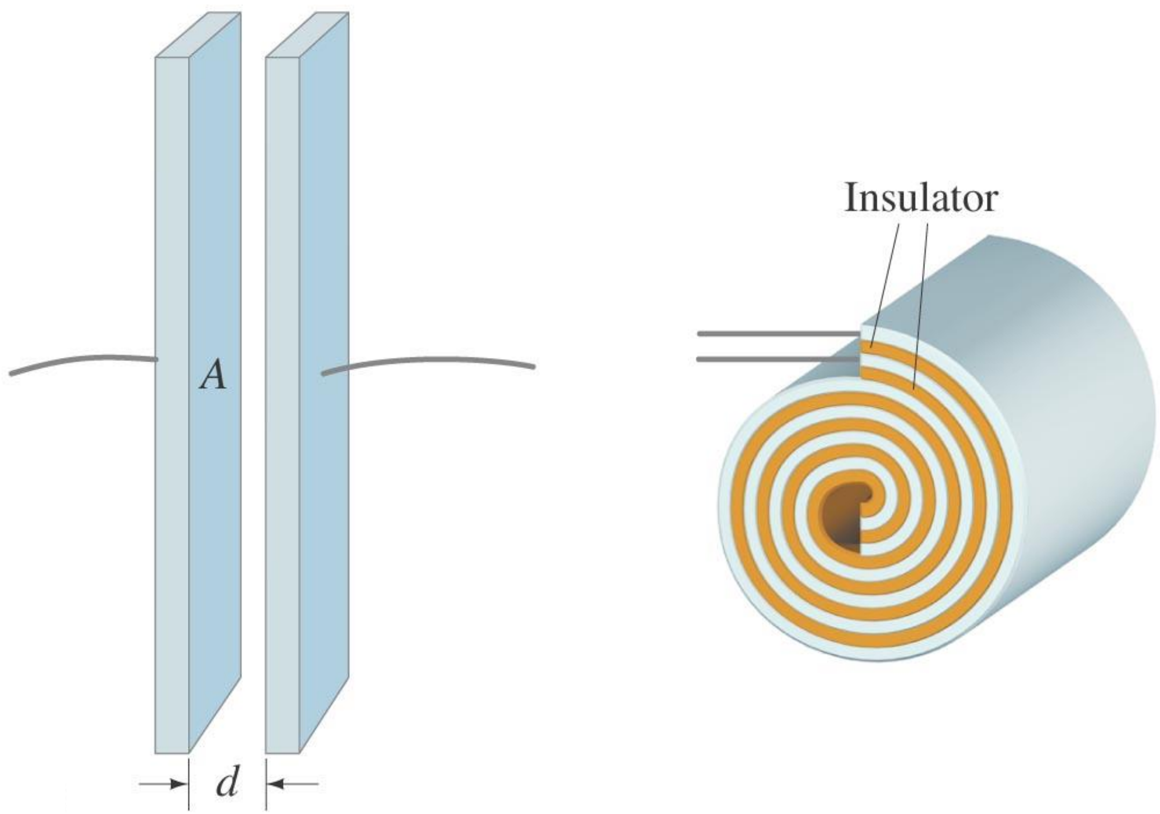


Περιεχόμενα 24

- Πυκνωτές
- Προσδιορισμός Χωρητικότητας Πυκνωτή
- Παράλληλη και σε σειρά σύνδεση πυκνωτών
- Αποθήκευση Ηλεκτρικής Ενέργειας
- Διηλεκτρικά
- Μοριακή περιγραφή Διηλεκτρικών

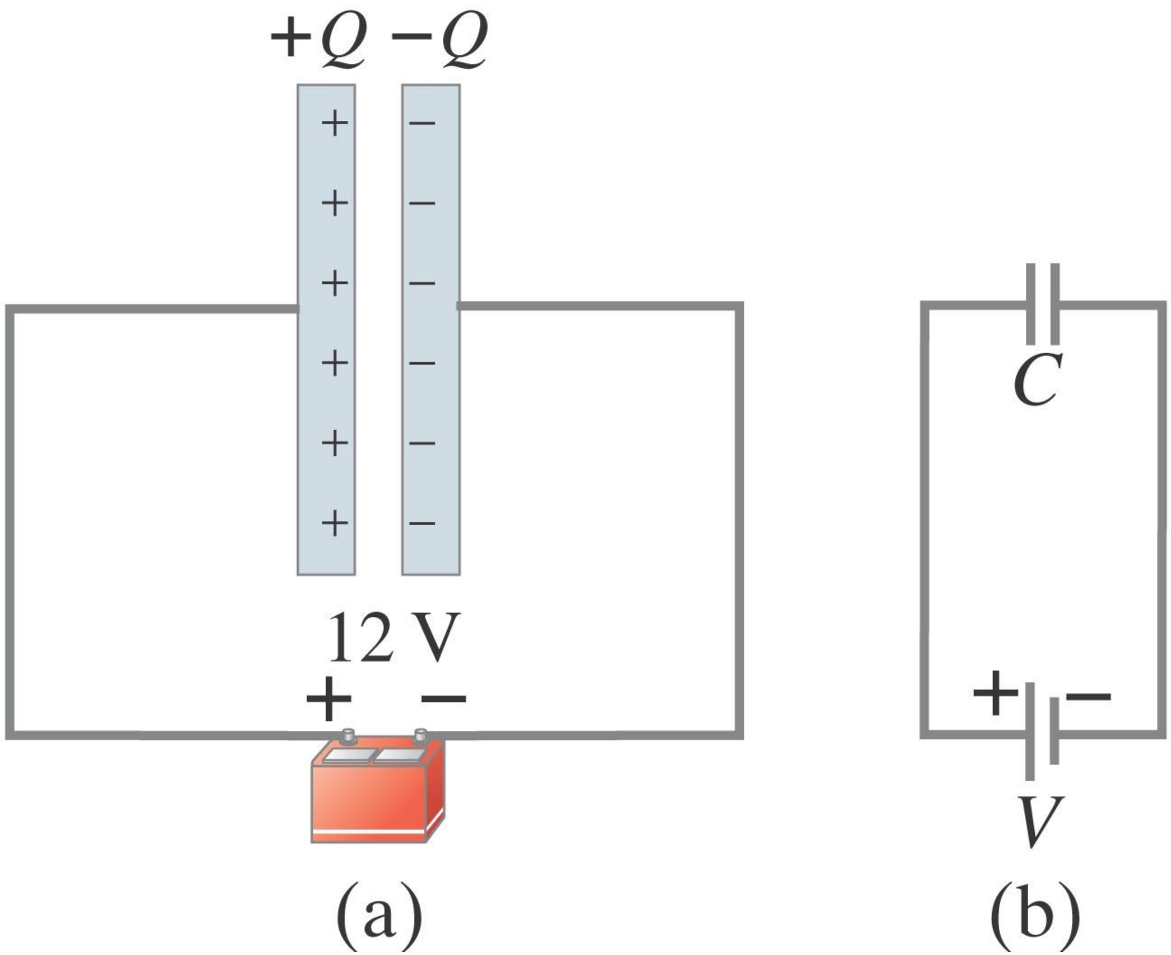
24-1 Πυκνωτές

Ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο αγωγούς που βρίσκονται σε πολύ κοντινή απόσταση αλλά όχι σε επαφή. Ο πυκνωτής έχει την ικανότητα να αποθηκεύσει ηλεκτρική ενέργεια..



24-1 Πυκνωτές

(α) Ένας Παράλληλος πυκνωτής συνδεδεμένος με μπαταρία, και στο (β) ηλεκτρικό διάγραμμα αυτής της συνδεσμολογίας.



24-1 Πυκνωτές

Όταν ένας πυκνωτής είναι συνδεδεμένος με μπαταρία, το φορτίο στους οπλισμούς του είναι ανάλογο της τάσεως της μπαταρίας :

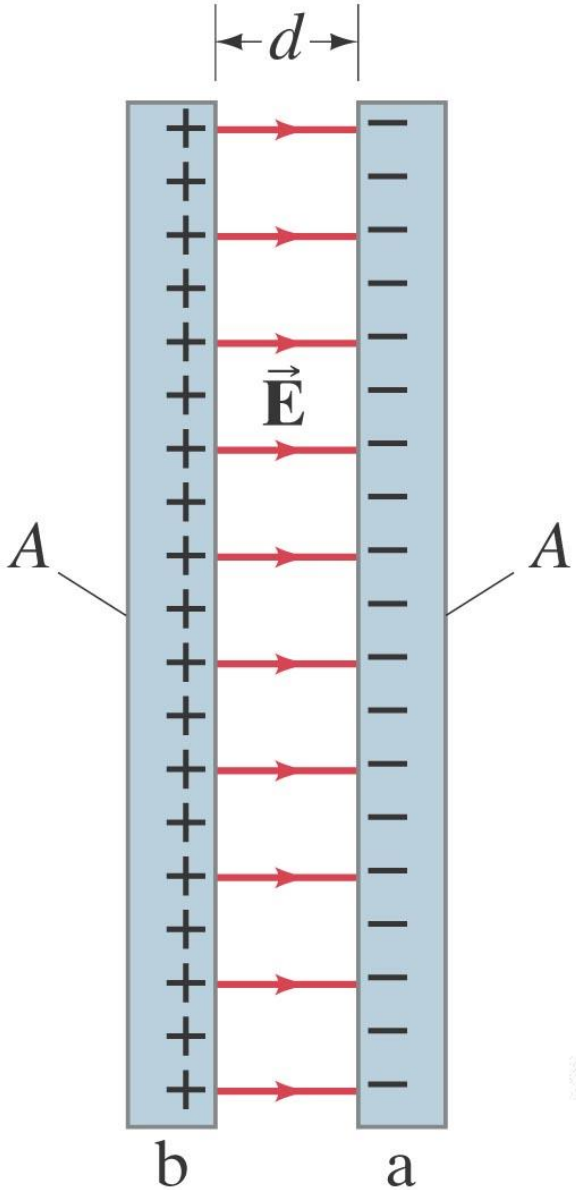
$$Q = CV.$$

Στη σταθερά αναλογίας C ονομάζεται η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Μονάδα χωρητικότητας: το farad (F):

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}.$$

24-2 Προσδιορισμός χωρητικότητας



Για ένα παράλληλο πυκνωτή όπως αυτός του σχήματος, το πεδίο μεταξύ των οπλισμών είναι

$$E = Q/(\varepsilon_0 A).$$

Και επομένως η διαφορά δυναμικού

$$V_{ba} = Qd/(\varepsilon_0 A).$$

Η χωρητικότητα τότε είναι:

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \qquad \text{[parallel-plate capacitor]}$$

(a) Βρείτε την χωρητικότητα για ένα παράλληλο πυκνωτή με οπλισμούς 20 cm × 3.0 cm σε απόσταση 1.0-mm στον αέρα. (b) Πόσο είναι το φορτίο του κάθε οπλισμού εάν συνδεθεί μια 12-V μπαταρία; (c) Πόσο είναι το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών; (d) Πόση είναι η απαιτούμενη επιφάνεια των οπλισμών ώστε να επιτευχθεί 1F χωρητικότητα δεδομένης της απόστασης d .

APPROACH The capacitance is found by using Eq. 24–2, $C = \epsilon_0 A/d$. The charge on each plate is obtained from the definition of capacitance, Eq. 24–1, $Q = CV$. The electric field is uniform, so we can use Eq. 23–4b for the magnitude $E = V/d$. In (d) we use Eq. 24–2 again.

SOLUTION (a) The area $A = (20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})(3.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}) = 6.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. The capacitance C is then

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2}) \frac{6.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2}{1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 53\,\mathrm{pF}.$$

(b) The charge on each plate is

$$Q = CV = (53 \times 10^{-12}\,\mathrm{F})(12\,\mathrm{V}) = 6.4 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}.$$

(c) From Eq. 23–4b for a uniform electric field, the magnitude of E is

$$E = \frac{V}{d} = \frac{12\,\mathrm{V}}{1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 1.2 \times 10^4\,\mathrm{V/m}.$$

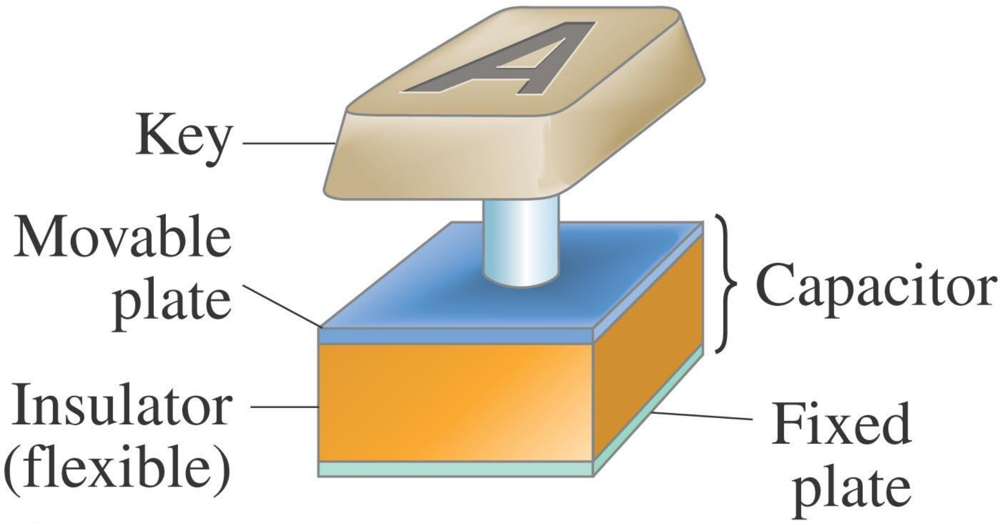
(d) We solve for A in Eq. 24–2 and substitute $C = 1.0\,\mathrm{F}$ and $d = 1.0\,\mathrm{mm}$ to find that we need plates with an area

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} \approx \frac{(1\,\mathrm{F})(1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m})}{(9 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2})} \approx 10^8\,\mathrm{m}^2.$$

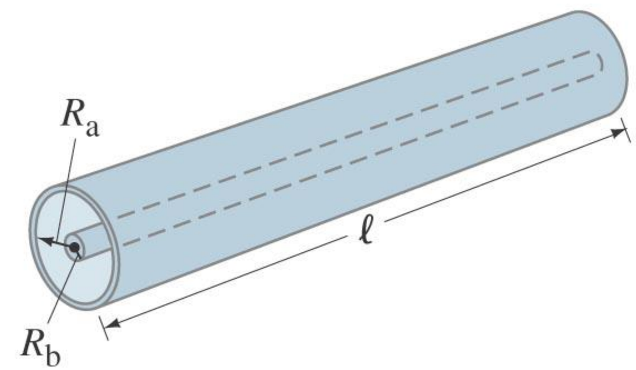
NOTE This is the area of a square 10^4 m or 10 km on a side. That is the size of a city like San Francisco or Boston! Large-capacitance capacitors will not be simple parallel plates.

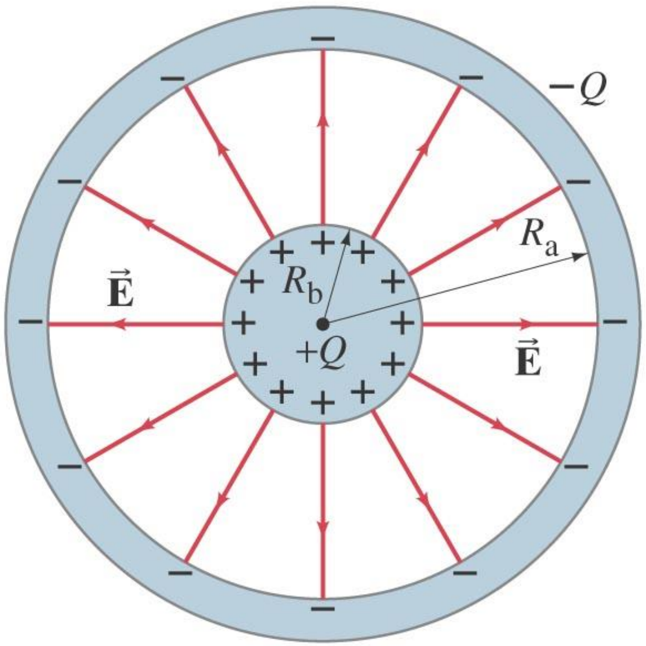
Πυκνωτές με χωρητικότητα 1 F κατασκευάζονται εύκολα πλέον αλλά δεν είναι παράλληλοι πυκνωτές. Χρησιμοποιείται ενεργός άνθρακας όπου 0.1 g αυτού του υλικού παρουσιάζει χωρητικότητα περίπου 1 F.

Ορισμένα πληκτρολόγια χρησιμοποιούν πυκνωτές, π.χ., η μεταβολή της απόσταση που προκαλείται με το πάτημα του πλήκτρου μεταβάλει την χωρητικότητα ενός πυκνωτής που ανιχνεύεται από το κύκλωμα.



Ένας κυλινδρικός πυκνωτής αποτελείται από ένα καλώδιο ακτίνας R_b και ένα ομοκεντρικό κυλινδρικό περίβλημα ακτίνας R_a, με το ίδιο μήκος. Υποθέτουμε ότι το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα του πυκνωτή. Ώστε να αγνοήσουμε τα «σφάλματα» στα άκρες. Το καλώδιο φέρει φορτίο $+Q$ και το περίβλημα $-Q$. Βρείτε την εξίσωση της χωρητικότητας.





APPROACH To obtain $C = Q/V$, we need to determine the potential difference V between the cylinders in terms of Q. We can use our earlier result (Example 21–11 or 22–6) that the electric field outside a long wire is directed radially outward and has magnitude $E = (1/2\pi\epsilon_0)(\lambda/R)$, where R is the distance from the axis and λ is the charge per unit length, Q/ℓ. Then $E = (1/2\pi\epsilon_0)(Q/\ell R)$ for points between the cylinders.

SOLUTION To obtain the potential difference V in terms of Q, we use this result for E in Eq. 23–4a, $V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$, and write the line integral from the outer cylinder to the inner one (so $V > 0$) along a radial line:[†]

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell}\int_{R_a}^{R_b} \frac{dR}{R}$$

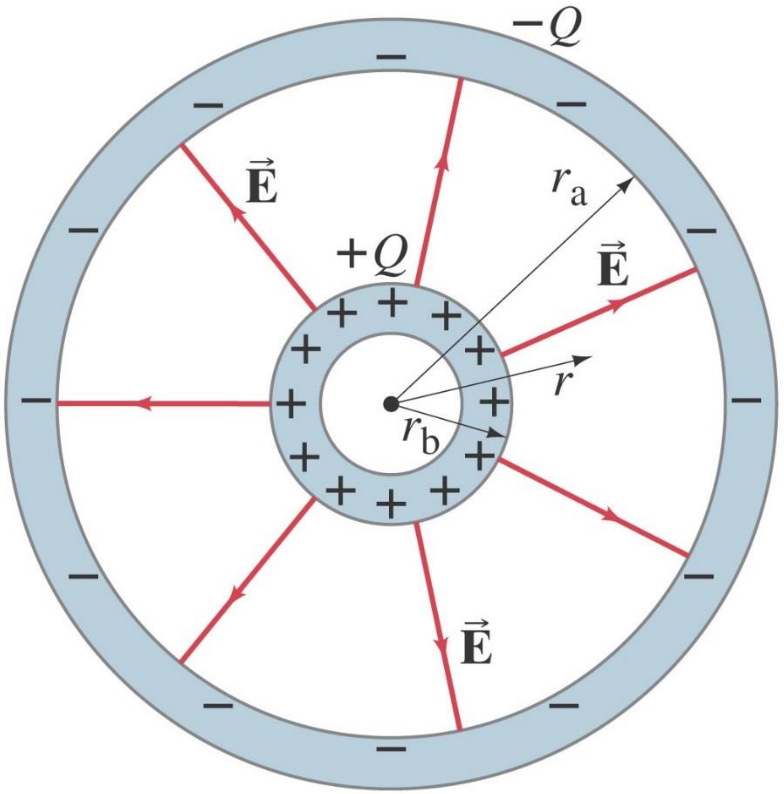
$$= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \ln\frac{R_b}{R_a} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \ln\frac{R_a}{R_b}.$$

Q and V are proportional, and the capacitance C is

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln(R_a/R_b)}. \qquad \text{[cylindrical capacitor]}$$

NOTE If the space between cylinders, $R_a - R_b = \Delta R$ is small, we have $\ln(R_a/R_b) = \ln[(R_b + \Delta R)/R_b] = \ln[1 + \Delta R/R_b] \approx \Delta R/R_b$ (see Appendix A–3) so $C \approx 2\pi\epsilon_0 \ell R_b/\Delta R = \epsilon_0 A/\Delta R$ because the area of cylinder b is $A = 2\pi R_b \ell$. This is just Eq. 24–2 $(d = \Delta R)$, a nice check.

Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δύο ομοκεντρικές σφαίρες με ακτίνες r_a και r_b (βλ. σχήμα). Η εσωτερική σφαίρα έχει φορτίο $+Q$ και η εξωτερική $-Q$. Βρείτε την χωρητικότητα του πυκνωτή



EXAMPLE 24–3 **Spherical capacitor.** A spherical capacitor consists of two thin concentric spherical conducting shells, of radius r_a and r_b as shown in Fig. 24–7. The inner shell carries a uniformly distributed charge Q on its surface, and the outer shell an equal but opposite charge $-Q$. Determine the capacitance of the two shells.

APPROACH In Example 22–3 we used Gauss's law to show that the electric field outside a uniformly charged conducting sphere is $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ as if all the charge were concentrated at the center. Now we use Eq. 23–4a, $V = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$.

SOLUTION We integrate Eq. 23–4a along a radial line to obtain the potential difference between the two conducting shells:

$$V_{ba} = -\int_a^b \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r_a - r_b}{r_a r_b}\right).$$

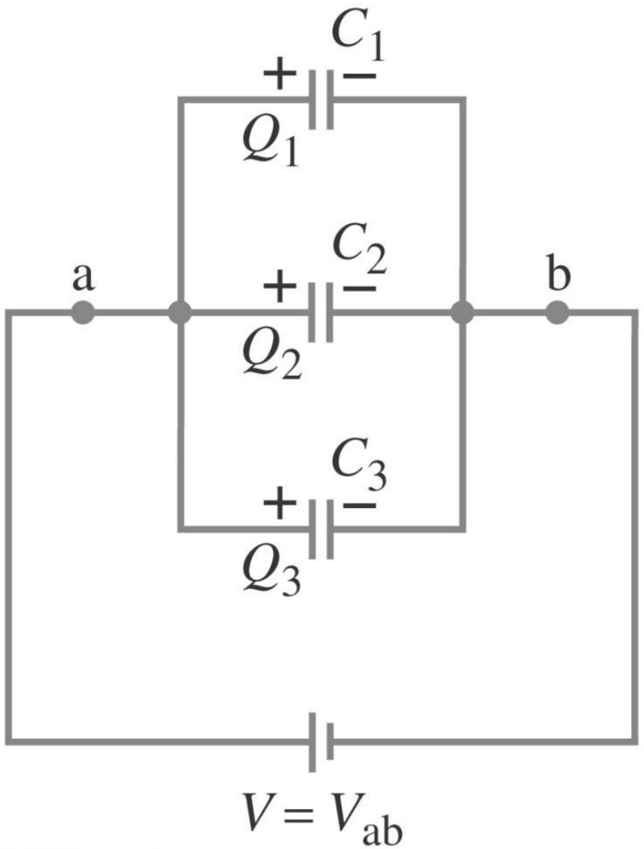
Finally,

$$C = \frac{Q}{V_{ba}} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{r_a r_b}{r_a - r_b}\right).$$

NOTE If the separation $\Delta r = r_a - r_b$ is very small, then $C = 4\pi\epsilon_0 r^2/\Delta r \approx \epsilon_0 A/\Delta r$ (since $A = 4\pi r^2$), which is the parallel-plate formula, Eq. 24–2.

24-3 Σύνδεση πυκνωτών παράλληλα

Για παράλληλη σύνδεση πυκνωτών, μιας και όλοι θα έχουν την ίδια τάση στις άκρες τους, η συνολική χωρητικότητα θα είναι το άθροισμα των επιμέρους χωρητικοτήτων.

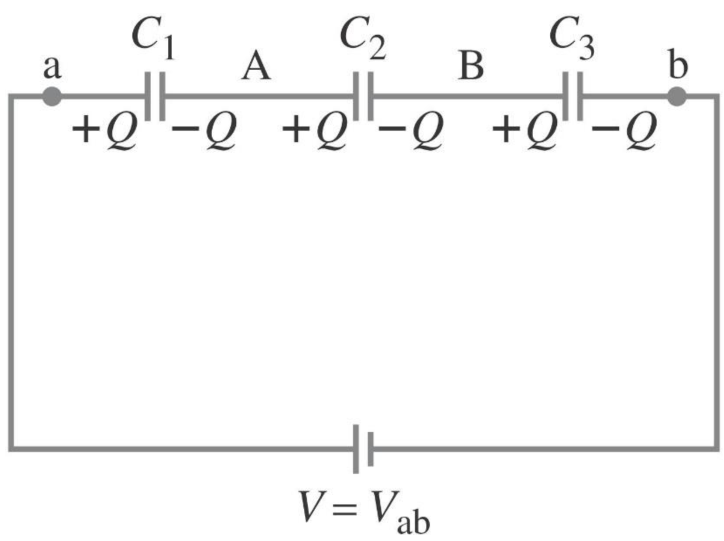


$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3. \quad \text{[parallel]}$$

24-3 Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά

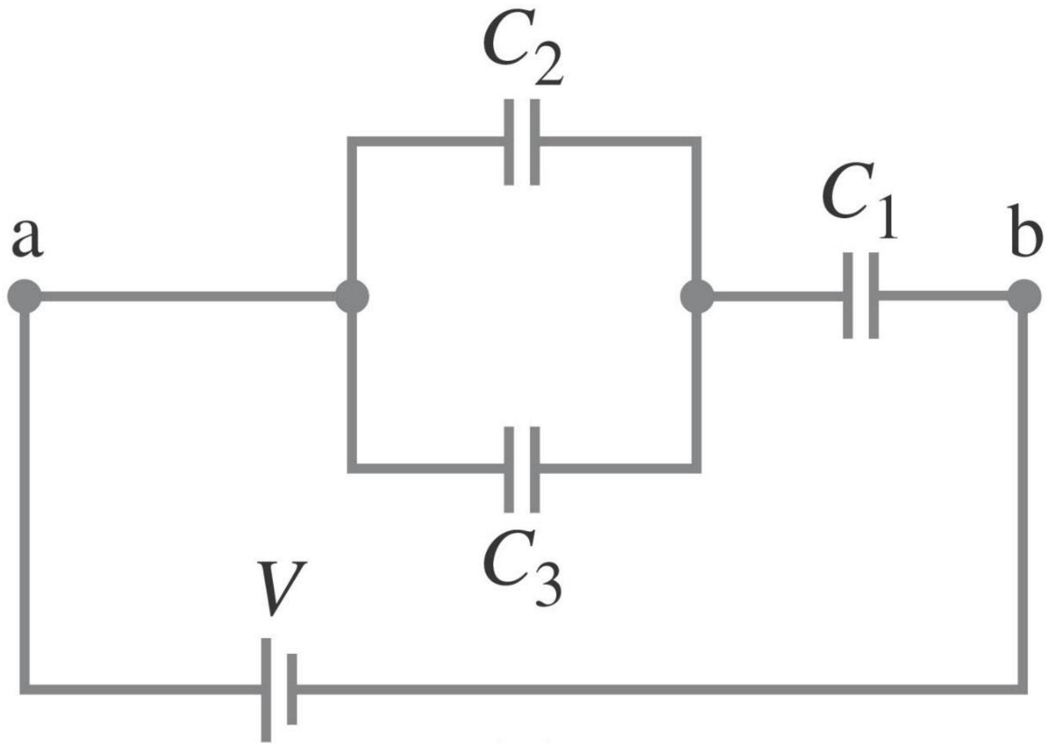
Για σύνδεση σε σειρά ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \qquad \text{[series]}$$



Η συνολική χωρητικότητα ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ.

Βρείτε την συνολική χωρητικότητα για το κύκλωμα.



APPROACH First we find the equivalent capacitance of C_2 and C_3 in parallel, and then consider that capacitance in series with C_1.

SOLUTION Capacitors C_2 and C_3 are connected in parallel, so they are equivalent to a single capacitor having capacitance

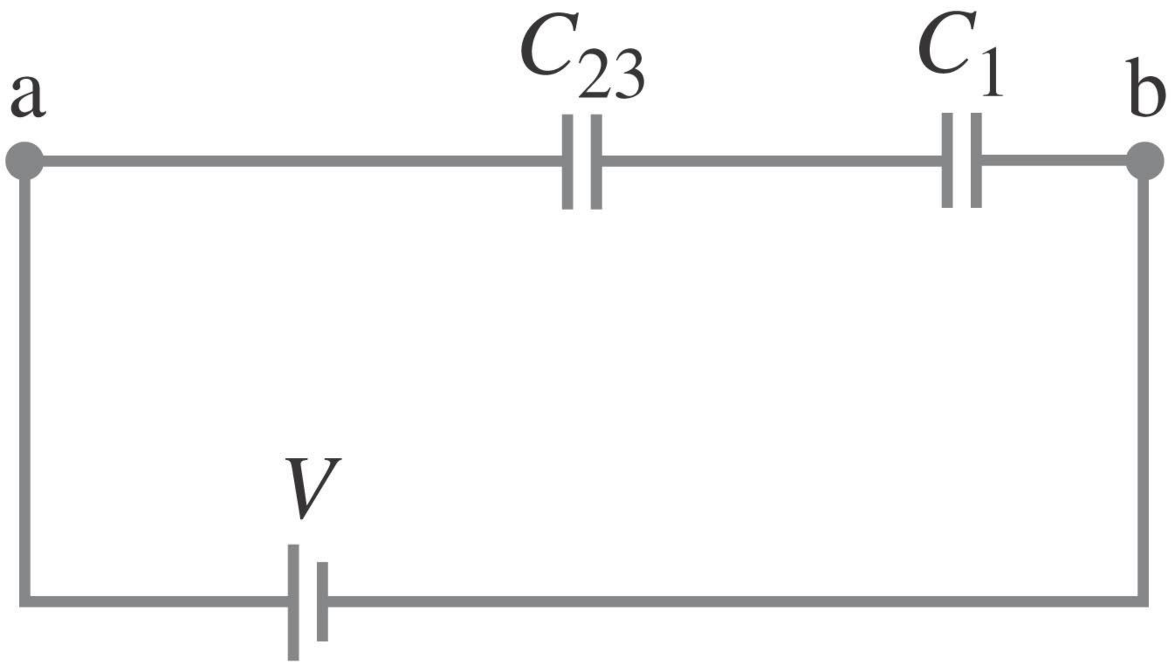
$$C_{23} = C_2 + C_3 = 2C.$$

This C_{23} is in series with C_1, Fig. 24–11b, so the equivalent capacitance of the entire circuit, C_{eq}, is given by

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} = \frac{3}{2C}.$$

Hence the equivalent capacitance of the entire combination is $C_{eq} = \frac{2}{3}C$, and it is smaller than any of the contributing capacitors, $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

Εάν V = 4.0 V , βρείτε τα φορτίο και την τάση κάθε πυκνωτή όταν C = 3.0 μF.



APPROACH We have to work "backward" through Example 24–5. That is, we find the charge Q that leaves the battery, using the equivalent capacitance. Then we find the charge on each separate capacitor and the voltage across each. Each step uses Eq. 24–1, $Q = CV$.

SOLUTION The 4.0-V battery behaves as if it is connected to a capacitance $C_{eq} = \frac{2}{3}C = \frac{2}{3}(3.0\,\mu\text{F}) = 2.0\,\mu\text{F}$. Therefore the charge Q that leaves the battery, by Eq. 24–1, is

$$Q = CV = (2.0\,\mu\text{F})(4.0\,\text{V}) = 8.0\,\mu\text{C}.$$

From Fig. 24–11a, this charge arrives at the negative plate of C_1, so $Q_1 = 8.0\,\mu\text{C}$. The charge Q that leaves the positive plate of the battery is split evenly between C_2 and C_3 (symmetry: $C_2 = C_3$) and is $Q_2 = Q_3 = \frac{1}{2}Q = 4.0\,\mu\text{C}$. Next, the voltages across C_2 and C_3 have to be the same. The voltage across each capacitor is obtained using $V = Q/C$. So

$$\begin{aligned} V_1 &= Q_1/C_1 = (8.0\,\mu\text{C})/(3.0\,\mu\text{F}) = 2.7\,\text{V} \\ V_2 &= Q_2/C_2 = (4.0\,\mu\text{C})/(3.0\,\mu\text{F}) = 1.3\,\text{V} \\ V_3 &= Q_3/C_3 = (4.0\,\mu\text{C})/(3.0\,\mu\text{F}) = 1.3\,\text{V}. \end{aligned}$$

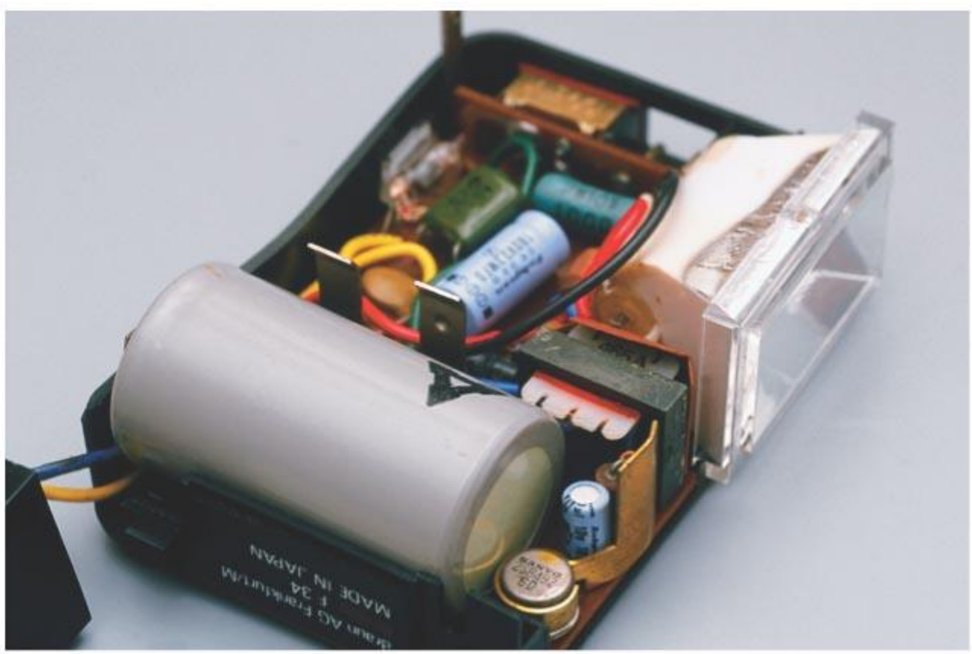
24-4 Αποθήκευση Ηλεκτρικής Ενέργειας

Ένας φορτισμένος πυκνωτής αποτελεί αποθήκη (ρεζερβουάρ) ηλεκτρικής ενέργειας:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV.$$

24-4 Αποθήκευση Ηλεκτρικής Ενέργειας

Το φλας μιας κάμερας αποτελείται από πυκνωτή με χωρητικότητα 150-μF στα 200 V. (a) Πόση είναι η αποθηκευμένη ηλεκτρική ενέργεια; (b) Πόση είναι η ισχύς του φλας εάν όλη η ενέργεια εκλύεται σε 1.0 ms?



APPROACH We use Eq. 24–5 in the form $U = \frac{1}{2}CV^2$ because we are given C and V.

SOLUTION The energy stored is

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(150 \times 10^{-6}\,\mathrm{F})(200\,\mathrm{V})^2 = 3.0\,\mathrm{J}.$$

If this energy is released in $\frac{1}{1000}$ of a second, the power output is $P = U/t = (3.0\,\mathrm{J})/(1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}) = 3000\,\mathrm{W}$.

24-4 Αποθήκευση Ηλεκτρικής Ενέργειας

Ένας παράλληλος πυκνωτής φορτίζεται με φορτίο Q και στη συνέχεια αποσυνδέεται από την μπαταρία. Αρχικά η απόσταση μεταξύ των οπλισμών είναι d. Εάν η απόσταση γίνει $2d$, πώς μεταβάλλεται η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή;

RESPONSE If we increase the plate separation d, we decrease the capacitance according to Eq. 24–2, $C = \epsilon_0 A/d$, by a factor of 2. The charge Q hasn't changed. So according to Eq. 24–5, where we choose the form $U = \frac{1}{2}Q^2/C$ because we know Q is the same and C has been halved, the reduced C means the potential energy stored increases by a factor of 2.

NOTE We can see why the energy stored increases from a physical point of view: the two plates are charged equal and opposite, so they attract each other. If we pull them apart, we must do work, so we raise their potential energy.

Η ενεργειακή πυκνότητα ορίζεται ως η ενέργεια ανά μονάδα όγκου, ανεξαρτήτως ήλεκτρικού πεδίου:

$$u = \text{energy density} = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

Η ξαφνική αποφόρτιση ενός πυκνωτή μπορεί να είναι ΘΑΝΑΤΗΦΟΡΑ. Ο πυκνωτής παραμένει φορτισμένος ακόμη και όταν έχει αποσυνδεθεί από την μπαταρία (τροφοδοσία)! Για την αποφυγή ατυχημάτων όταν αποθηκεύουμε μεγάλης χωρητικότητας πυκνωτές, βραχυκυκλώνουμε τους οπλισμούς τους.

Οι απινιδωτές καρδιάς, σώζουν ζωές, ανακινώντας την λειτουργία της καρδιάς μέσω ηλεκτρικών αποφορτίσεων

24-5 Διηλεκτρικά

Το διηλεκτρικό είναι μονωτής που χαρακτηρίζεται από μια διηλεκτρική σταθερά *K*.

Η Χωρητικότητα ενός πυκνωτή με διηλεκτρικό χώρισμα μεταξύ των οπλισμών είναι:

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d}. \qquad \text{[parallel-plate capacitor]}$$

Ορίζουμε την ηλεκτρική διαπερατότητα υλικών από την διηλεκτρική σταθερά:

$$\epsilon = K\epsilon_0.$$

24-5 Διηλεκτρικά

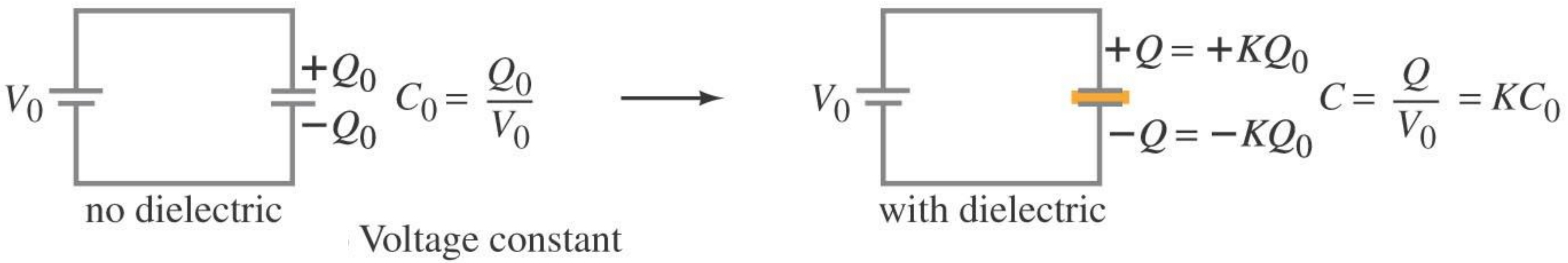
TABLE 24–1
Dielectric Constants (at 20°C)

Material	Dielectric constant K	Dielectric strength (V/m)
Vacuum	1.0000	
Air (1 atm)	1.0006	3×10^6
Paraffin	2.2	10×10^6
Polystyrene	2.6	24×10^6
Vinyl (plastic)	2–4	50×10^6
Paper	3.7	15×10^6
Quartz	4.3	8×10^6
Oil	4	12×10^6
Glass, Pyrex	5	14×10^6
Porcelain	6–8	5×10^6
Mica	7	150×10^6
Water (liquid)	80	
Strontium titanate	300	8×10^6

Η διηλεκτρική ισχύς είναι το μέγιστο ηλεκτρικό πεδίο που μπορεί να δεχτεί ένα διηλεκτρικό πριν παρουσιαστεί ηλεκτρική εκκένωση.

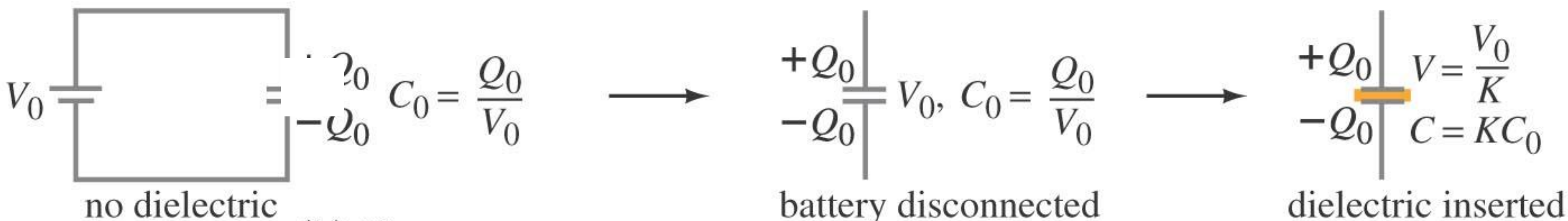
24-5 Διηλεκτρικά

Η αντικατάσταση του αέρα/κενού σε ένα πυκνωτή με διηλεκτρικό υλικού έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της χωρητικότητας του πυκνωτή.



24-5 Διηλεκτρικά

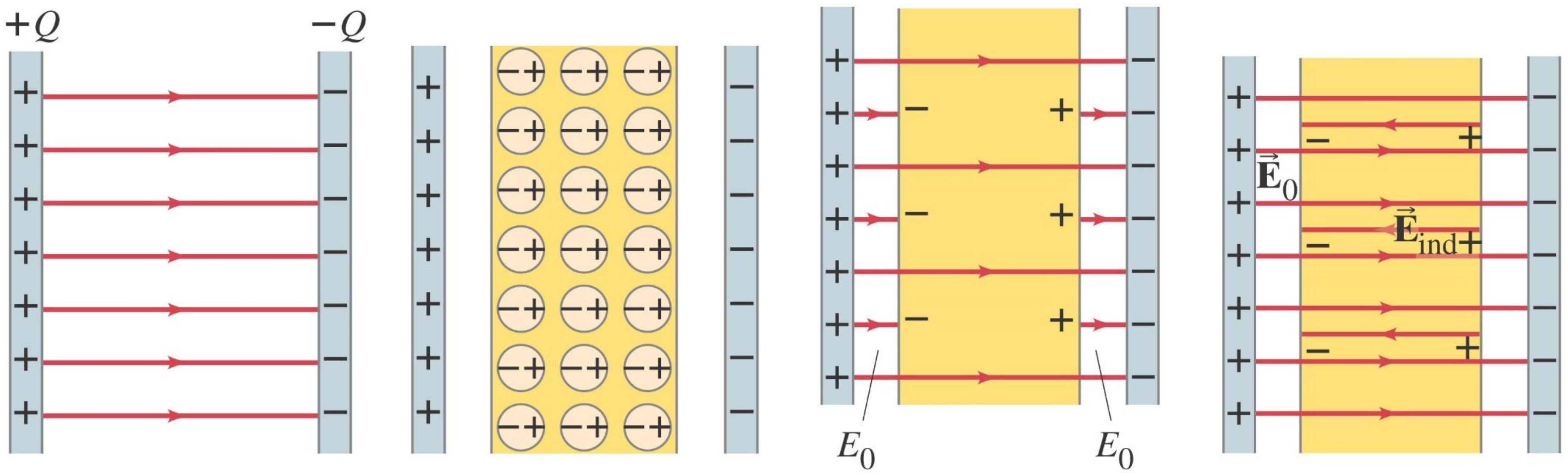
Φορτίζουμε ένα πυκνωτή και στη συνέχεια αποσυνδέουμε την μπαταρία. Εάν εισάγουμε ένα διηλεκτρικό στο κενό μεταξύ των οπλισμών τότε η τάση μεταξύ των οπλισμών μειώνεται εξ αιτίας της αύξησης της χωρητικότητας (τα φορτία των οπλισμών παραμένουν σταθερά εφόσον δεν έχουμε πλέον συνδεδεμένη την μπαταρία).



(b) Charge constant

24-6 Μοριακή περιγραφή των διηλεκτρικών

Η «πόλωση» των μορίων ενός διηλεκτρικού έχει σαν αποτέλεσμα την ουσιαστική μερική μείωση του εξωτερικού πεδίου.



24-6 Μοριακή περιγραφή των διηλεκτρικών

Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό είναι μικρότερο απ' ότι στο αέρα, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αποθηκεύσουμε περισσότερα φορτία για την ίδια τάση. Αν και δεν υπάρχει περίσσια φορτίου στο διηλεκτρικό, η πόλωση των μορίων δημιουργεί ένα «επαγόμενο» φορτίο.

Το μέγεθος του επαγόμενου φορτίου εξαρτάται από την διηλεκτρική σταθερά μέσω της σχέσης:

$$Q_{\text{ind}} = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right).$$