# Κεφάλαιο 7

# Έργο και Ενέργεια

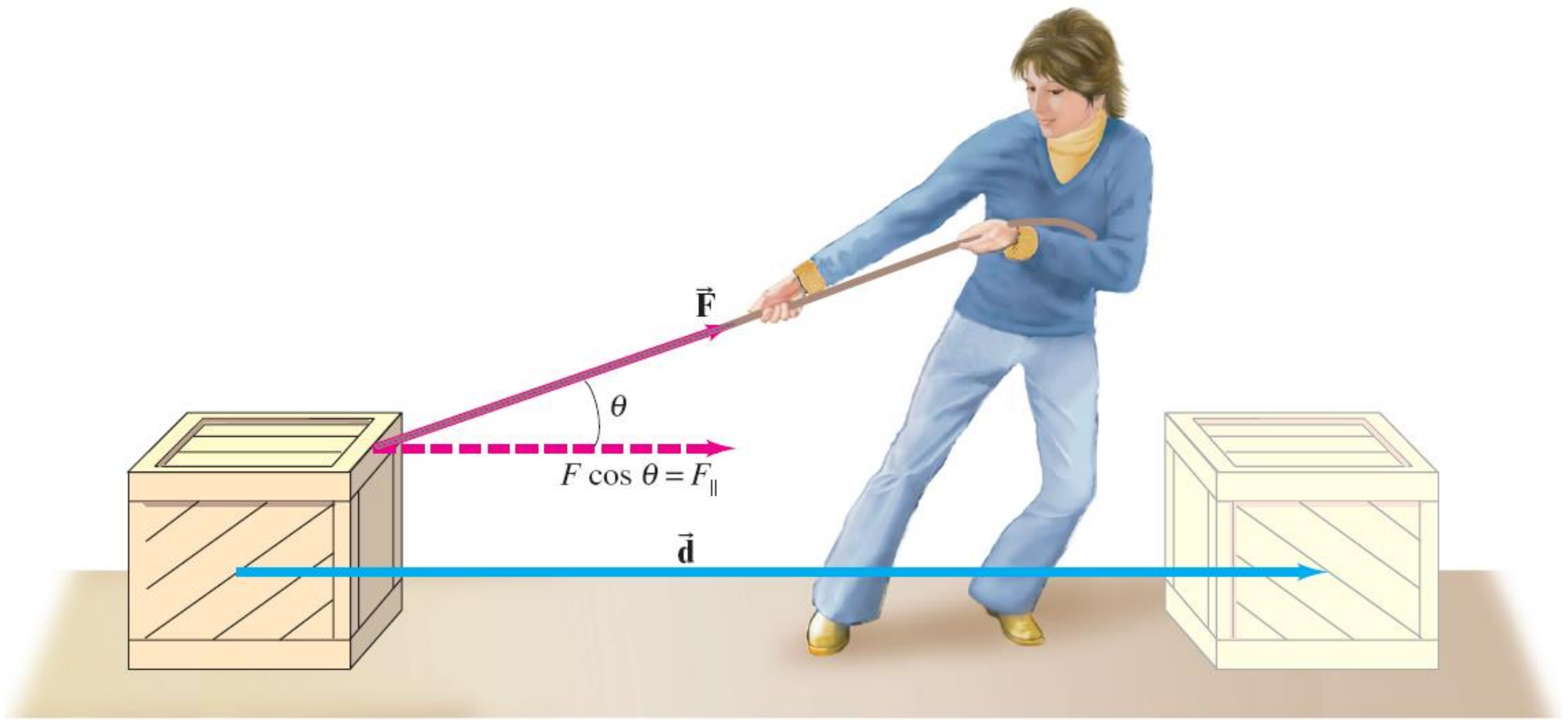
# Περιεχόμενα Κεφαλαίου 7

- Το έργο σταθερής δύναμης
- Εσωτερικό Γινόμενο δύο διανυσμάτων
- Έργο μεταβλητής δύναμης
- Σχέση Ενέργειας και έργου

# 7-1 Το έργο σταθερής δύναμης

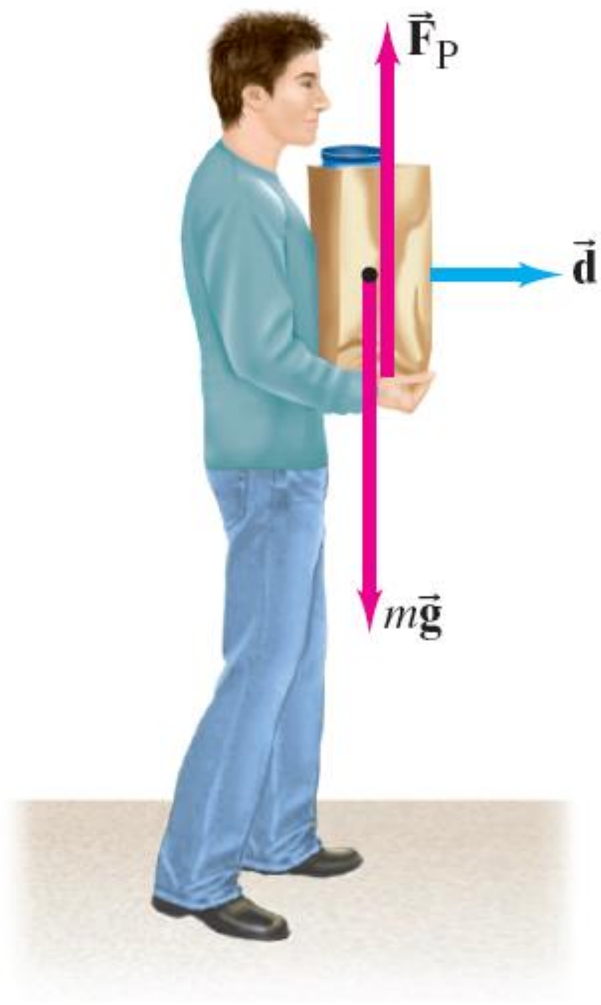
Το **έργο** που εκτελείτε από **σταθερή** δύναμη ορίζεται ως το γινόμενο της **απόστασης** που διανύθηκε με την **συνιστώσα της δύναμης στην κατεύθυνση της μετατόπισης**

$$W = Fd\cos\theta.$$



# 7-1 Το έργο σταθερής δύναμης

Στο σύστημα SI, η μονάδα είναι το **Joule**:

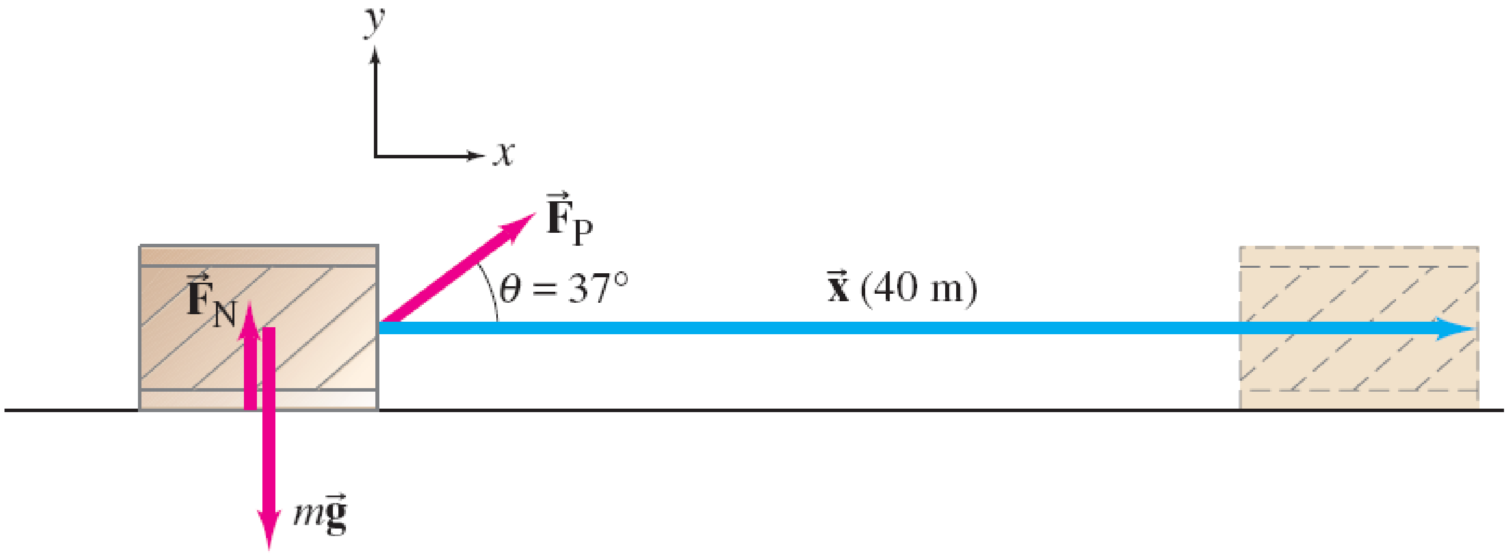


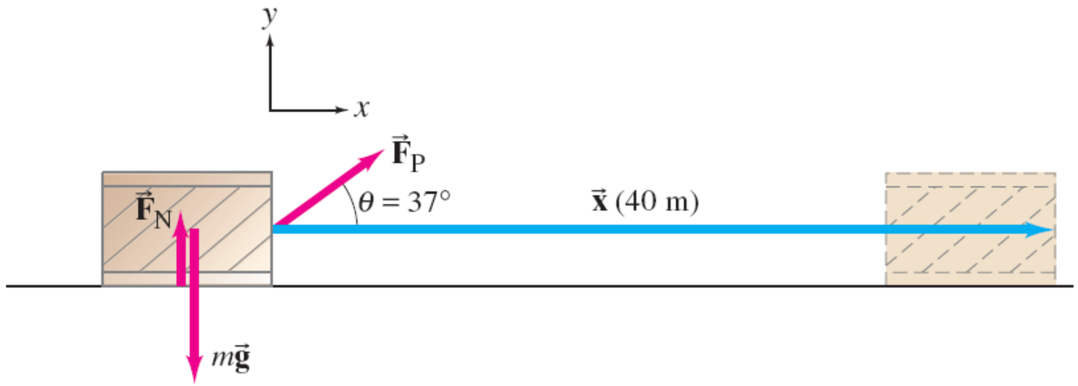

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}.$$

Ο κύριος που μεταφέρει τα «μαναβικά» δεν ασκεί έργο εφόσον δεν μετακινήσει την σακούλα **πάνω** ή **κάτω**. Δεν υπάρχει έργο εάν δεν υπάρχει συνιστώσα της δύναμης στην κατεύθυνση της μετατόπισης.

# 7-1 Το έργο σταθερής δύναμης

Ένα κιβώτιο 50-kg μεταφέρεται 40 m οριζοντίως με δύναμη $F_P$= 100 N, που δρα σε γωνία 37° όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Δεν υπάρχουν τριβές. Βρείτε (α) Το έργο που παράγει η δύναμη αυτή στο κιβώτιο (β) το συνολικό έργο του κιβωτίου.






**APPROACH** We choose our coordinate system so that $\vec{\mathbf{x}}$ can be the vector that represents the 40-m displacement (that is, along the $x$ axis). Three forces act on the crate, as shown in Fig. 7–3: the force exerted by the person $\vec{\mathbf{F}}_P$; the gravitational force exerted by the Earth, $m\vec{\mathbf{g}}$; and the normal force $\vec{\mathbf{F}}_N$ exerted upward by the floor. The net force on the crate is the vector sum of these three forces.

**SOLUTION** (*a*) The work done by the gravitational and normal forces is zero, since they are perpendicular to the displacement $\vec{\mathbf{x}}$ ($\theta = 90°$ in Eq. 7–1):

$$W_G = mgx\cos 90° = 0$$
$$W_N = F_N x\cos 90° = 0.$$

The work done by $\vec{\mathbf{F}}_P$ is

$$W_P = F_P x\cos\theta = (100\text{ N})(40\text{ m})\cos 37° = 3200\text{ J}.$$

(*b*) The net work can be calculated in two equivalent ways:
(1) The net work done on an object is the algebraic sum of the work done by each force, since work is a scalar:

$$\begin{aligned} W_{net} &= W_G + W_N + W_P \\ &= 0 + 0 + 3200\text{ J} = 3200\text{ J}. \end{aligned}$$

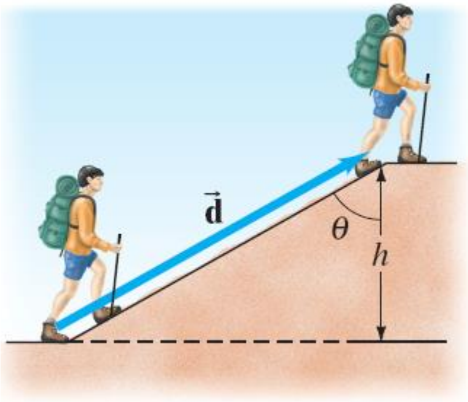
(2) The net work can also be calculated by first determining the net force on the object and then taking its component along the displacement: $(F_{net})_x = F_P\cos\theta$. Then the net work is

$$\begin{aligned} W_{net} &= (F_{net})_x x = (F_P\cos\theta)x \\ &= (100\text{ N})(\cos 37°)(40\text{ m}) = 3200\text{ J}. \end{aligned}$$

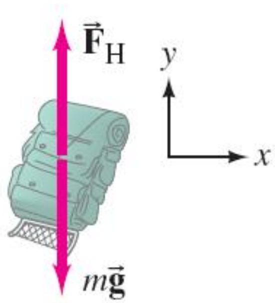
In the vertical ($y$) direction, there is no displacement and no work done.

## Επίλυση προβλημάτων έργου:

1. Διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος.
2. Διαλέγουμε σύστημα συντεταγμένων.
3. Εφαρμόζουμε του Νόμους του Νεύτωνα για να βρούμε όλες τις δυνάμεις, και την συνολική δύναμη.
4. Βρίσκουμε το έργο της κάθε δύναμης και της συνολικής.




**(α) Βρείτε το έργο ενός ορειβάτη που κουβαλάει ένα σακίδιο 15.0-kg σε ύψος *h* = 10.0 m. Βρείτε επίσης (β) το έργο που ασκεί η βαρύτητα στο σακίδιο (γ) το συνολικό έργο στο σακίδιο. Υποθέστε ότι η ανάβαση είναι ομαλή (σταθερή ταχύτητα και μηδενική επιτάχυνση)**

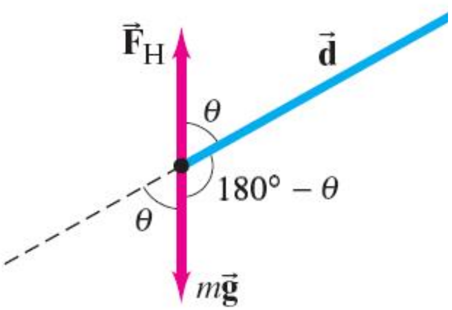


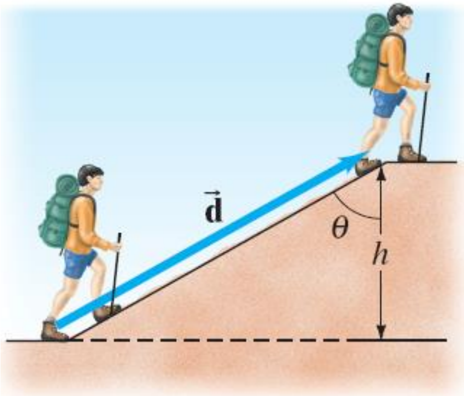

1. **Draw a free-body diagram.** The forces on the backpack are shown in Fig. 7–4b: the force of gravity, $m\vec{g}$, acting downward; and $\vec{F}_H$, the force the hiker must exert upward to support the backpack. The acceleration is zero, so horizontal forces on the backpack are negligible.
2. **Choose a coordinate system.** We are interested in the vertical motion of the backpack, so we choose the $y$ coordinate as positive vertically upward.
3. **Apply Newton's laws.** Newton's second law applied in the vertical direction to the backpack gives

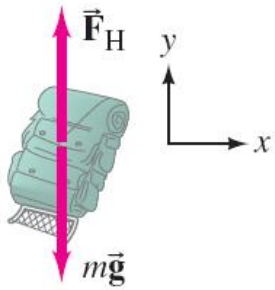
$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_H - mg = 0$$

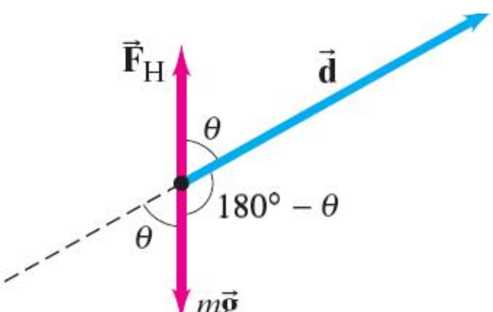
since $a_y = 0$. Hence,

$$F_H = mg = (15.0\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2}) = 147\,\mathrm{N}.$$






4. **Work done by a specific force.** (*a*) To calculate the work done by the hiker on the backpack, we write Eq. 7–1 as

$$W_H = F_H(d\cos\theta),$$

and we note from Fig. 7–4a that $d\cos\theta = h$. So the work done by the hiker is

$$W_H = F_H(d\cos\theta) = F_H h = mgh$$
$$= (147\,\text{N})(10.0\,\text{m}) = 1470\,\text{J}.$$

Note that the work done depends only on the change in elevation and not on the angle of the hill, $\theta$. The hiker would do the same work to lift the pack vertically the same height $h$.

(*b*) The work done by gravity on the backpack is (from Eq. 7–1 and Fig. 7–4c)

$$W_G = F_G d\cos(180° - \theta).$$

Since $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, we have

$$W_G = F_G d(-\cos\theta) = mg(-d\cos\theta)$$
$$= -mgh$$
$$= -(15.0\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2)(10.0\,\text{m}) = -1470\,\text{J}.$$

**NOTE** The work done by gravity (which is negative here) doesn't depend on the angle of the incline, only on the vertical height $h$ of the hill. This is because gravity acts vertically, so only the vertical component of displacement contributes to work done.

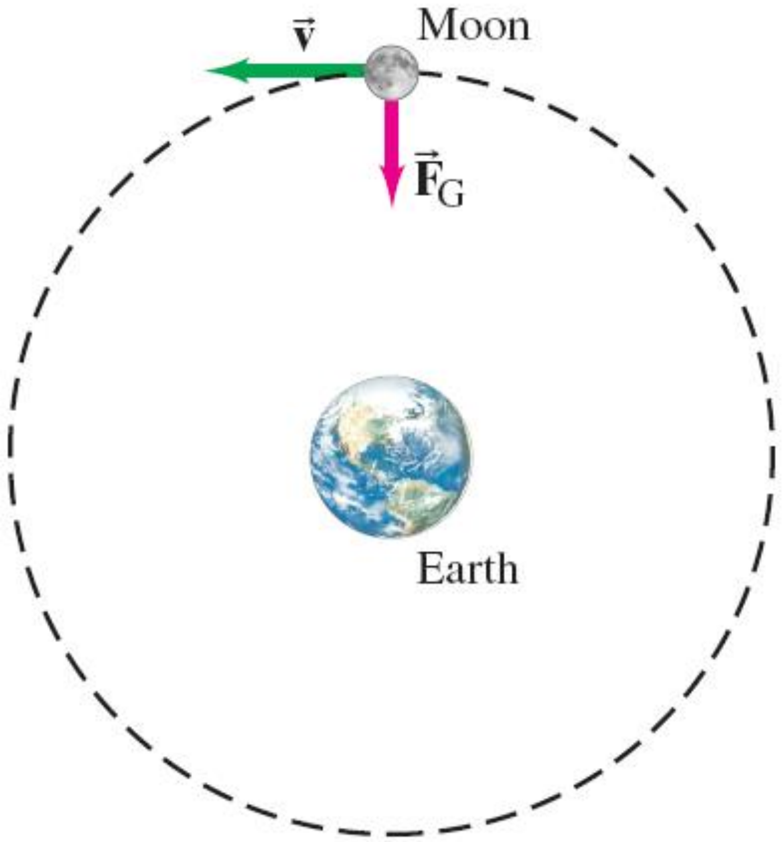
5. **Net work done.** (*c*) The *net* work done on the backpack is $W_{net} = 0$, since the net force on the backpack is zero (it is assumed not to accelerate significantly). We can also determine the net work done by adding the work done by each force:

$$W_{net} = W_G + W_H = -1470\,\text{J} + 1470\,\text{J} = 0.$$

**NOTE** Even though the *net* work done by all the forces on the backpack is zero, the hiker *does do* work on the backpack equal to 1470 J.

# Ασκεί έργο πάνω στο Φεγγάρι η Γη;

**ΌΧΙ….Δεν υπάρχει έργο μιας και η κεντρομόλος δύναμη είναι πάντα κάθετη στην τροχιά!**

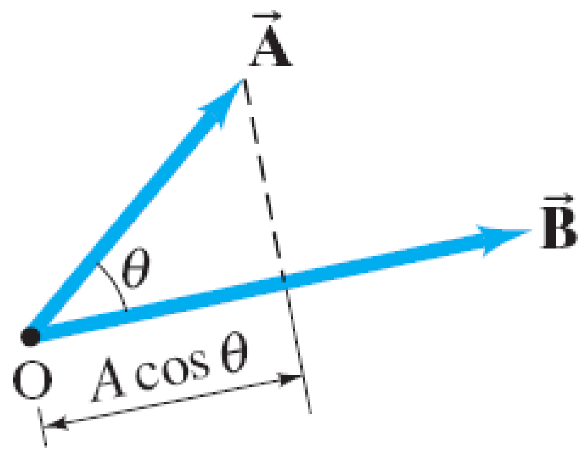


# 7-2 Εσωτερικό γινόμενο Διανυσμάτων

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta$$

## Και επομένως

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = Fd\cos\theta.$$



**Η δύναμη του διαγράμματος έχει μέτρο $F_P$ = 20 N και γωνία 30° με το οριζόντιο έδαφος. Βρείτε το έργο της δύναμης χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο όταν το βαγονάκι σύρεται 100 m κατά μήκος του εδάφους.**


**APPROACH** We choose the $x$ axis horizontal to the right and the $y$ axis vertically upward, and write $\vec{\mathbf{F}}_P$ and $\vec{\mathbf{d}}$ in terms of unit vectors.

**SOLUTION**

$$\vec{\mathbf{F}}_P = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} = (F_P\cos 30^\circ)\hat{\mathbf{i}} + (F_P\sin 30^\circ)\hat{\mathbf{j}} = (17\,\mathrm{N})\hat{\mathbf{i}} + (10\,\mathrm{N})\hat{\mathbf{j}},$$

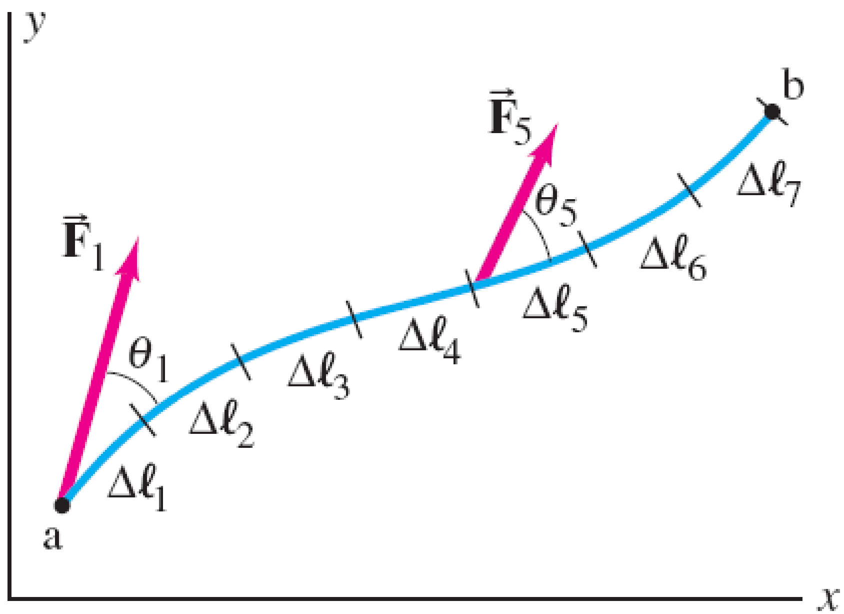
whereas $\vec{\mathbf{d}} = (100\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{i}}$. Then, using Eq. 7–4,

$$W = \vec{\mathbf{F}}_P \cdot \vec{\mathbf{d}} = (17\,\mathrm{N})(100\,\mathrm{m}) + (10\,\mathrm{N})(0) + (0)(0) = 1700\,\mathrm{J}.$$

Note that by choosing the $x$ axis along $\vec{\mathbf{d}}$ we simplified the calculation because $\vec{\mathbf{d}}$ then has only one component.

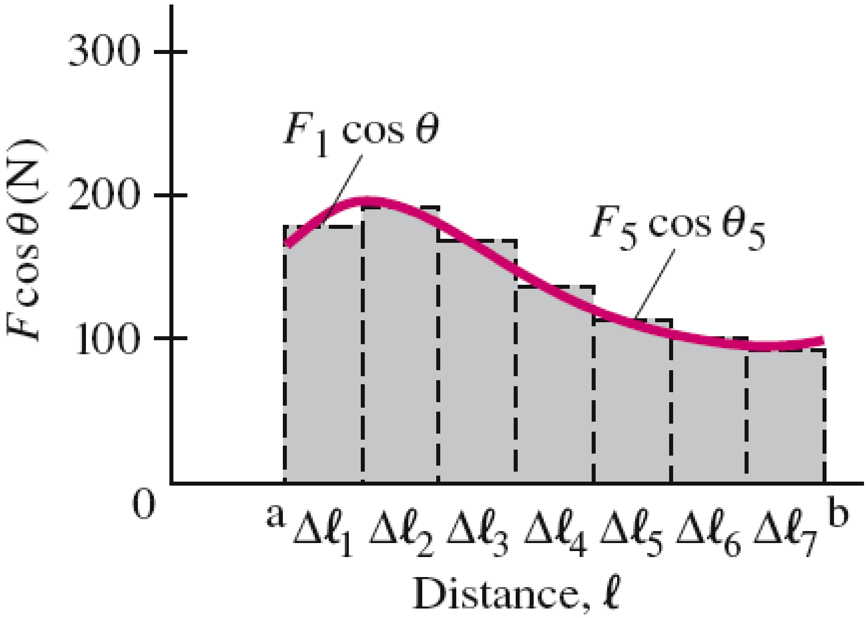
# 7-3 Έργο μεταβλητής Δυναμης

**Μια μεταβλητή δύναμη ασκείται πάνω σε ένα αντικείμενο. Στην περίπτωση αυτή το γινόμενο** $\vec{F} \bullet \vec{d}$ **δεν είναι σταθερό**



**Για μεταβλητές δυνάμεις, για να βρούμε το έργο κατά προσέγγιση, χωρίζουμε το διάστημα σε μικρά διαστήματα και υποθέτουμε ότι σε κάθε μικρό διάστημα η δύναμη είναι σταθερή.**

$$W \approx \sum_{i=1}^{7} F_i \cos\theta_i \, \Delta\ell_i$$

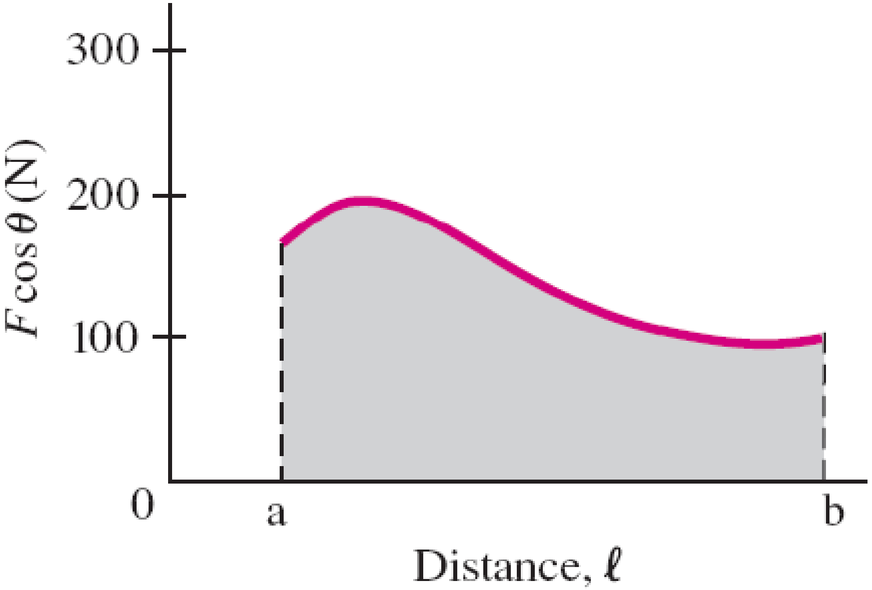


Εάν τα επιμέρους διαστήματα γίνουν απειροελάχιστα, το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα:

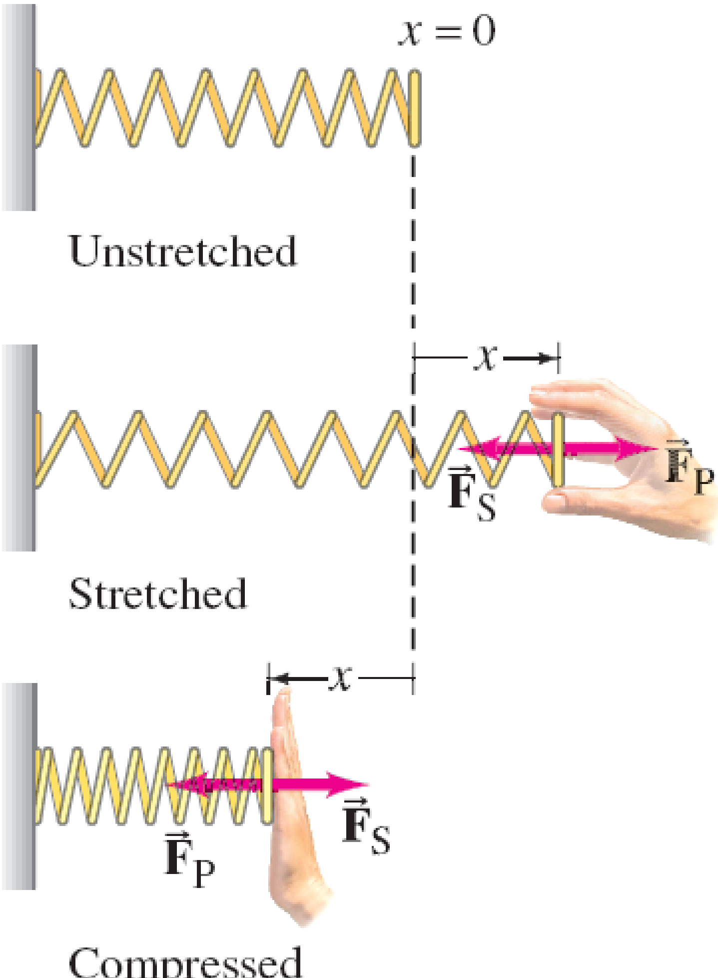
$$W = \lim_{\Delta\ell_i \to 0} \sum F_i \cos\theta_i \, \Delta\ell_i = \int_a^b F \cos\theta \, d\ell.$$

δηλ:

$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}.$$



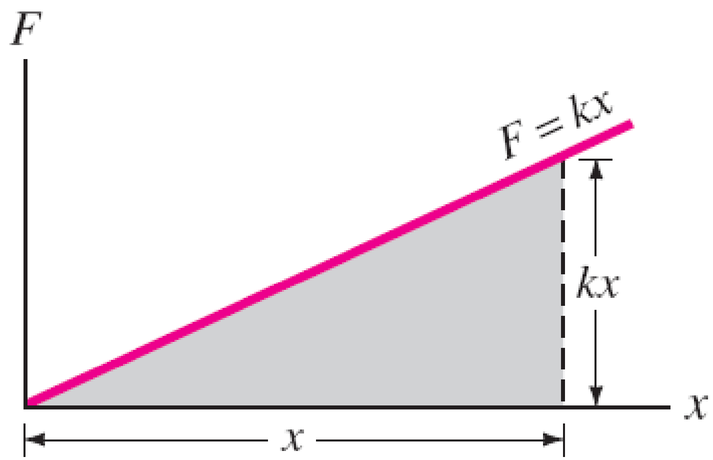
# Το έργο ενός ελατηρίου:




Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο είναι:

$$F_S = -kx.$$

Η δύναμη που ασκεί χέρι μας είναι: $F_s = kx$




**Η γραφική παράσταση της δύναμης του ελατηρίου είναι ευθεία ως προς την μετατόπιση**

$$W_P = \int_{x_a=0}^{x_b=x} [F_P(x)\,\hat{\mathbf{i}}] \cdot [dx\,\hat{\mathbf{i}}] = \int_0^x F_P(x)\,dx$$

$$= \int_0^x kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2\Big|_0^x = \tfrac{1}{2}kx^2$$

**(α) Ένας φοιτητής τεντώνει ένα ελατήριο κατά 3.0 cm, με δύναμη 75 N. Πόσο έργο «έκανε»; (β) Εάν συμπίεζε το ελατήριο κατά 3.0 cm, τώρα πόσο έργο κάνει;**

**APPROACH** The force $F = kx$ holds at each point, including $x_{max}$. Hence $F_{max}$ occurs at $x = x_{max}$.

**SOLUTION** (*a*) First we need to calculate the spring constant $k$:

$$k = \frac{F_{max}}{x_{max}} = \frac{75\text{ N}}{0.030\text{ m}} = 2.5 \times 10^3\text{ N/m}.$$

Then the work done by the person on the spring is

$$W = \tfrac{1}{2}kx_{max}^2 = \tfrac{1}{2}(2.5 \times 10^3\text{ N/m})(0.030\text{ m})^2 = 1.1\text{ J}.$$

(*b*) The force that the person exerts is still $F_P = kx$, though now both $x$ and $F_P$ are negative ($x$ is positive to the right). The work done is

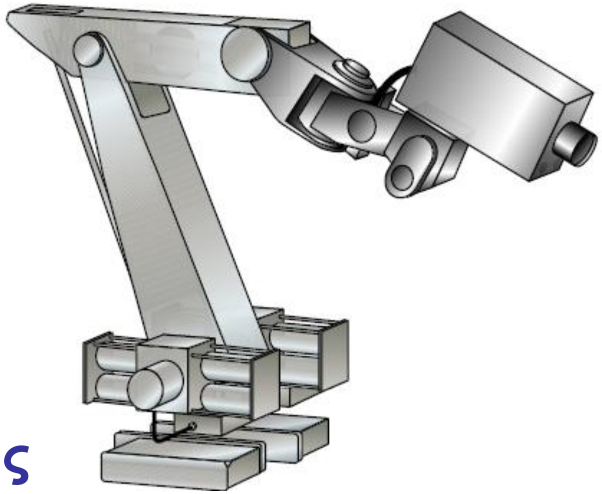
$$W_P = \int_{x=0}^{x=-0.030\text{ m}} F_P(x)\,dx = \int_0^{x=-0.030\text{ m}} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2\Big|_0^{-0.030\text{ m}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(2.5 \times 10^3\text{ N/m})(-0.030\text{ m})^2 = 1.1\text{ J},$$

which is the same as for stretching it.

**NOTE** We cannot use $W = Fd$ (Eq. 7–1) for a spring because the force is not constant.

**Η δύναμη που ελέγχει μια ρομποτική κάμερα παρακολούθησης δίδεται από την σχέση**



$$F(x) = F_0\left(1 + \frac{1}{6}\frac{x^2}{x_0^2}\right),$$

**Όπου $F_0$ = 2.0 N, $x_0$ = 0.0070 m, και $x$ είναι η θέση της άκρης το βραχίονα. Εάν ο βραχίονας μετατοπιστεί από $x_1$ = 0.010 m στο $x_2$ = 0.050 m, πόσο έργο έκανε το μοτέρ;**

Fig. 7–13).

**SOLUTION** We integrate to find the work done by the motor:

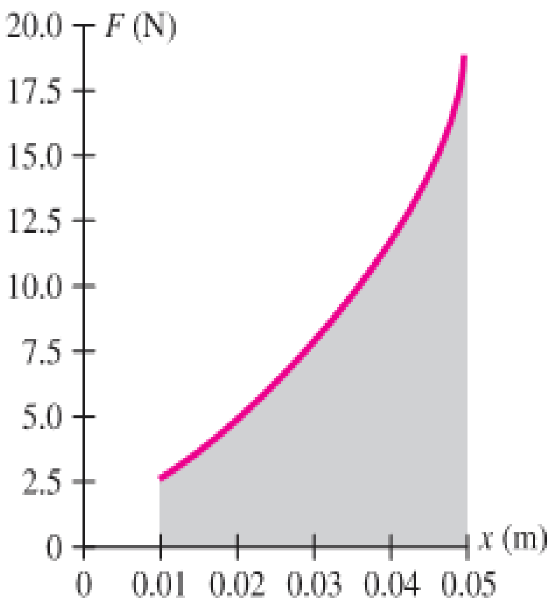
$$W_M = F_0\int_{x_1}^{x_2}\left(1 + \frac{x^2}{6x_0^2}\right)dx = F_0\int_{x_1}^{x_2}dx + \frac{F_0}{6x_0^2}\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx$$

$$= F_0\left(x + \frac{1}{6x_0^2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

We put in the values given and obtain

$$W_M = 2.0\,\mathrm{N}\left[(0.050\,\mathrm{m} - 0.010\,\mathrm{m}) + \frac{(0.050\,\mathrm{m})^3 - (0.010\,\mathrm{m})^3}{(3)(6)(0.0070\,\mathrm{m})^2}\right] = 0.36\,\mathrm{J}.$$

**FIGURE 7–13** Example 7–6.



# Κινητική Ενέργεια, σχέση ενέργειας και έργου

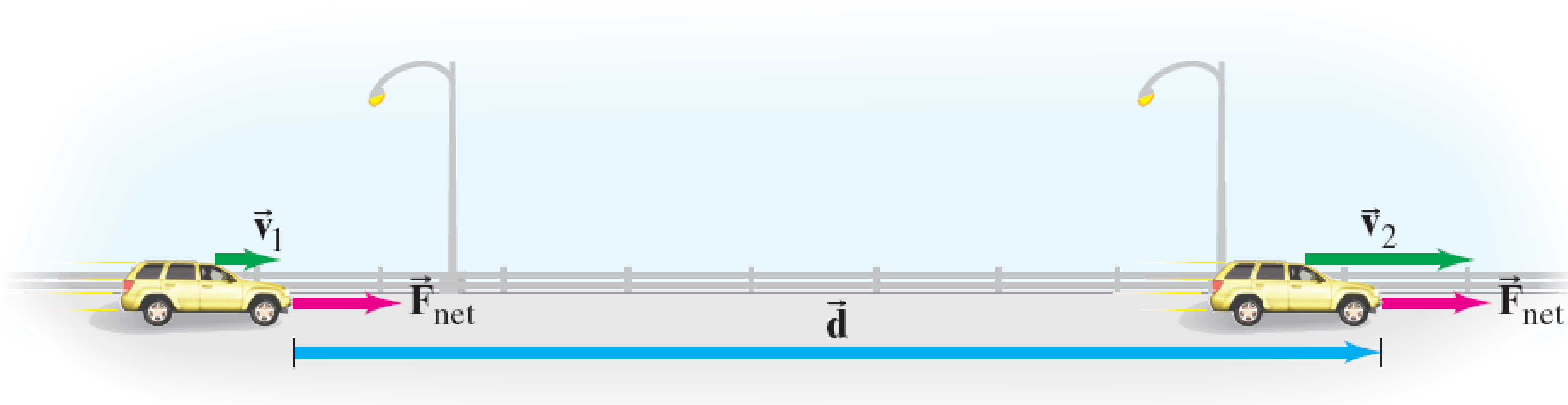
**Η Ενέργεια** ορίζεται παραδοσιακά ως η ικανότητα να παραχθεί **έργο**.

Βέβαια είδαμε ότι όλες οι δυνάμεις δεν παράγουν έργο (;).

Όταν όμως αναφερόμαστε σε μηχανική ενέργεια, τότε ο παραπάνω ορισμός ισχύει.

# Η Κινητική ενέργεια ορίζεται

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

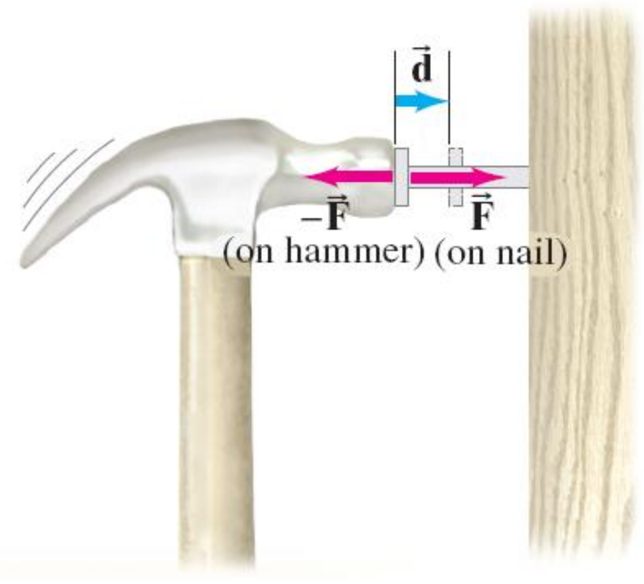


## Το έργο είναι ίσο με την μεταβολή στην κινητική ενέργεια:

$$W_{\text{net}} = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 .$$

- Θετικό έργο: αύξηση της Κινητικής Ενέργειας
- Αρνητικό έργο: Μείωση της Κινητικής Ενέργειας

**Οι μονάδες ενέργειας είναι ίδιες με τις μονάδες έργου δηλ. J (Joules)**



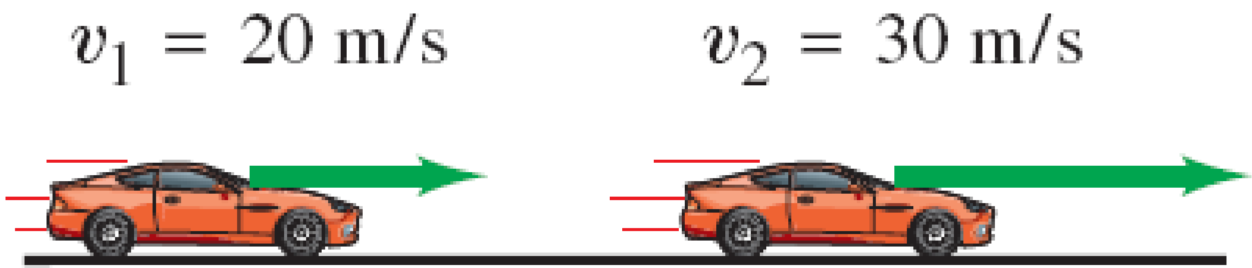
## Πετάμε ένα τόπι 145-g με ταχύτητα 25 m/s. (α) Πόση είναι η κινητική του ενέργεια (β) Πόσο έργο χρειάστηκε για τη ρίψη;

**SOLUTION** (*a*) The kinetic energy of the ball after the throw is

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.145\,\mathrm{kg})(25\,\mathrm{m/s})^2 = 45\,\mathrm{J}.$$

(*b*) Since the initial kinetic energy was zero, the net work done is just equal to the final kinetic energy, 45 J.

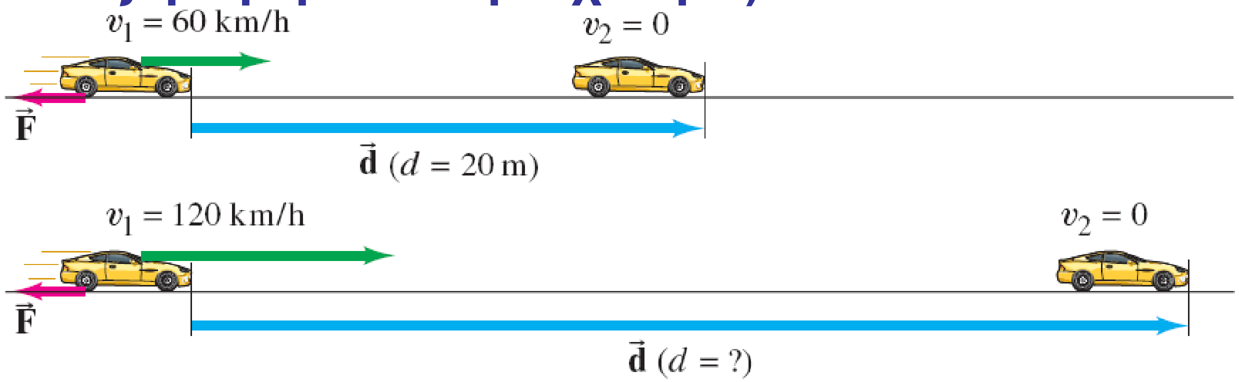
## Πόσο έργο απαιτείται για να επιταχύνει ένα αυτοκίνητο 1000kg από τα 20 m/s στα 30 m/s;




**SOLUTION** The net work needed is equal to the increase in kinetic energy:

$$W = K_2 - K_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(1000\,\mathrm{kg})(30\,\mathrm{m/s})^2 - \tfrac{1}{2}(1000\,\mathrm{kg})(20\,\mathrm{m/s})^2 = 2.5 \times 10^5\,\mathrm{J}.$$

**Ένα αυτοκίνητο που κινείται με 60 km/h φρενάρει και ακινητοποιείται σε απόσταση $d$=20 m. Εάν το αυτοκίνητο κινείτο με διπλάσια ταχύτητα πόση απόσταση χρειάζεται για να σταματήσει; (υποθέτουμε ότι η απόδοση των φρένων είναι ανεξάρτητη από τη ταχύτητα).**




**RESPONSE** Again we model the car as if it were a particle. Because the net stopping force $F$ is approximately constant, the work needed to stop the car, $Fd$, is proportional to the distance traveled. We apply the work-energy principle, noting that $\vec{\mathbf{F}}$ and $\vec{\mathbf{d}}$ are in opposite directions and that the final speed of the car is zero:

$$W_{net} = Fd\cos 180° = -Fd.$$

Then

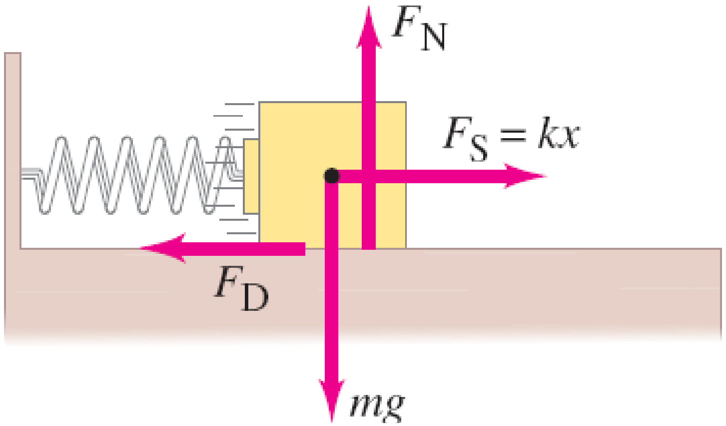
$$-Fd = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$
$$= 0 - \tfrac{1}{2}mv_1^2.$$

Thus, since the force and mass are constant, we see that the stopping distance, $d$, increases with the square of the speed:

$$d \propto v^2.$$

If the car's initial speed is doubled, the stopping distance is $(2)^2 = 4$ times as great, or 80 m.

**Το ελατήριο του σχήματος έχει σταθερά $k$ = 360 N/m. (α) Πόσο έργο απαιτείται για να συμπιεστεί το ελατήριο, από την κατάσταση ηρεμίας ($x$ = 0) στα $x$ = 11.0 cm; (β) Εάν φορτώσουμε το συμπιεσμένο ελατήριο με «βόλι» 1.85-kg πόση ταχύτητα θα έχει το βόλι στην θέση $x$ = 0; (αγνοούμε την τριβή). (γ) Επαναλαμβάνουμε το (β) αλλά υποθέτοντας ότι υπάρχει μια δύναμη αντίστασης (τριβής) $F_D$ = 7.0 N**




**SOLUTION** (*a*) The work needed to compress the spring a distance $x = 0.110$ m is

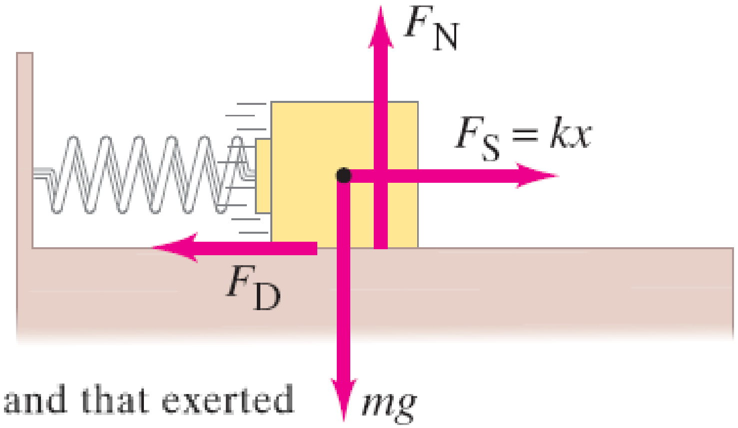
$$W = \tfrac{1}{2}(360\,\mathrm{N/m})(0.110\,\mathrm{m})^2 = 2.18\,\mathrm{J},$$

where we have converted all units to SI.

(*b*) In returning to its uncompressed length, the spring does 2.18 J of work on the block (same calculation as in part (*a*), only in reverse). According to the work-energy principle, the block acquires kinetic energy of 2.18 J. Since $K = \tfrac{1}{2}mv^2$, the block's speed must be

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(2.18\,\mathrm{J})}{1.85\,\mathrm{kg}}} = 1.54\,\mathrm{m/s}.$$




($c$) There are two forces on the block: that exerted by the spring and that exerted by the drag force, $\vec{\mathbf{F}}_D$. Work done by a force such as friction is complicated. For one thing, heat (or, rather, "thermal energy") is produced—try rubbing your hands together. Nonetheless, the product $\vec{\mathbf{F}}_D \cdot \vec{\mathbf{d}}$ for the drag force, even when it is friction, can be used in the work-energy principle to give correct results for a particle-like object. The spring does 2.18 J of work on the block. The work done by the friction or drag force on the block, in the negative $x$ direction, is

$$W_D = -F_D x = -(7.0\,\text{N})(0.110\,\text{m}) = -0.77\,\text{J}.$$

This work is negative because the drag force acts in the direction opposite to the displacement $x$. The net work done on the block is $W_{net} = 2.18\,\text{J} - 0.77\,\text{J} = 1.41\,\text{J}$. From the work-energy principle, Eq. 7–11 (with $v_2 = v$ and $v_1 = 0$), we have

$$v = \sqrt{\frac{2W_{net}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.41\,\text{J})}{1.85\,\text{kg}}} = 1.23\,\text{m/s}$$

for the block's speed at the moment it separates from the spring $(x = 0)$.