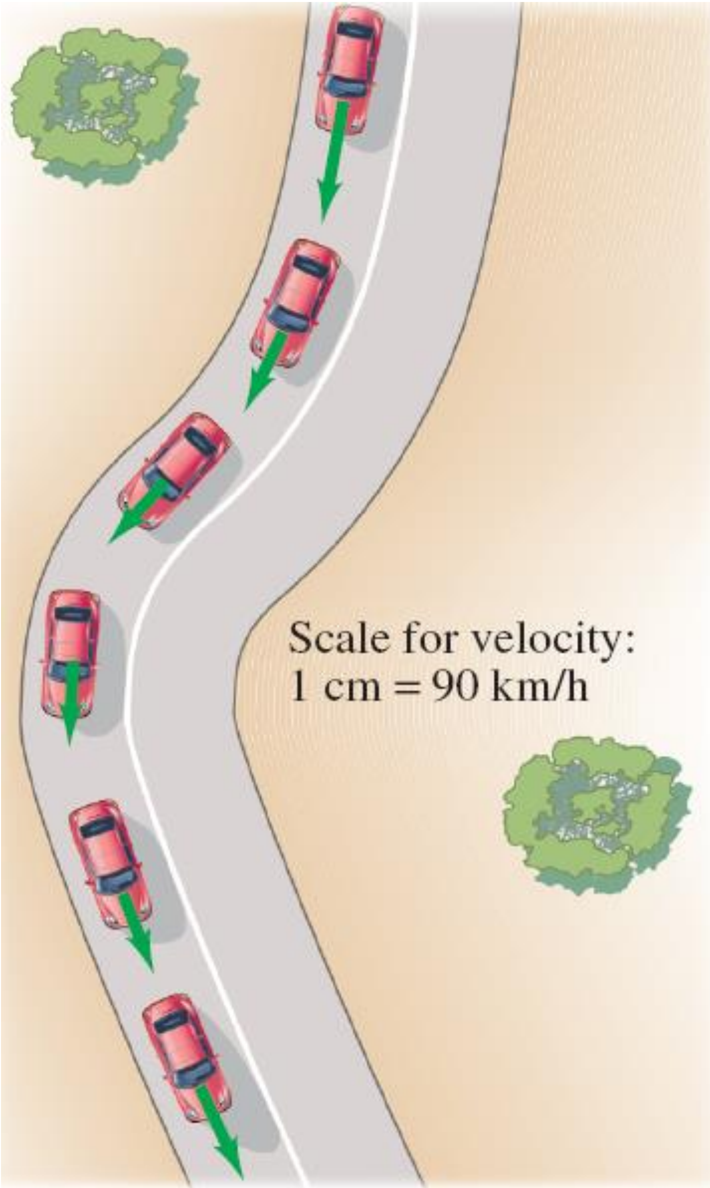
Κεφάλαιο 3

Κίνηση σε 2 και 3 διαστάσεις; Διανύσματα

Περιεχόμενα 3

- **Διανύσματα και Βαθμοτές ποσότητες**
- **Πράξεις Διανυσμάτων –Γραφικές Παραστάσεις**
- **Μοναδιαία διανύσματα**
- **Κινηματική διανυσμάτων**
- **Κίνηση Βλημάτων**
- **Επίλυση κίνησης Βλημάτων**
- **Σχετική Ταχύτητα**

3-1 Διανύσματα και Βαθμοτές Ποσότητες



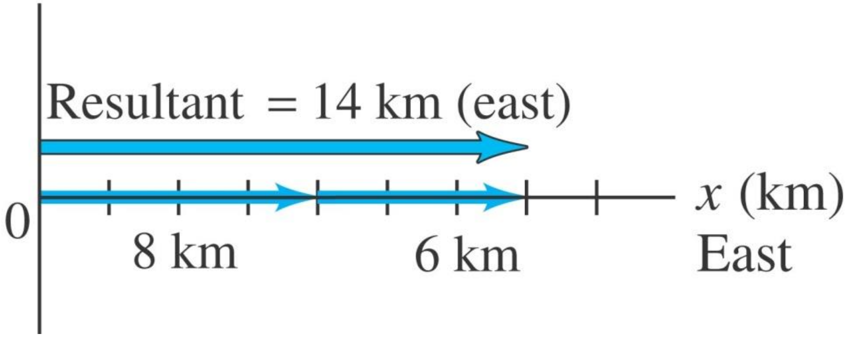
Το διάνυσμα έχει και μέγεθος (μέτρο) και διεύθυνση.

Ορισμένες Διανυσματικές Ποσότητες: μετατόπιση, ταχύτητα, δύναμη, ορμή

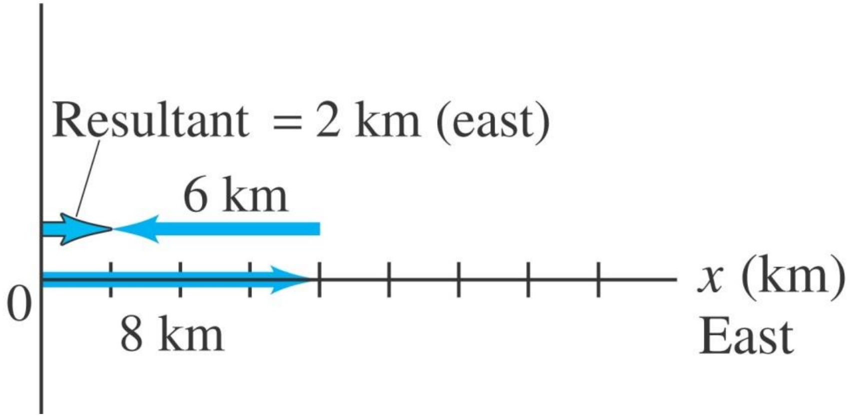
Η βαθμοτή ποσότητα έχει μόνο μέγεθος (μέτρο).

Ορισμένες Βαθμοτές ποσότητες: μάζα χρόνος θερμοκρασία.

3-2 Πράξεις διανυσμάτων



Για μία διάσταση, πρόσθεση και αφαίρεση είναι οι μόνες πράξεις.



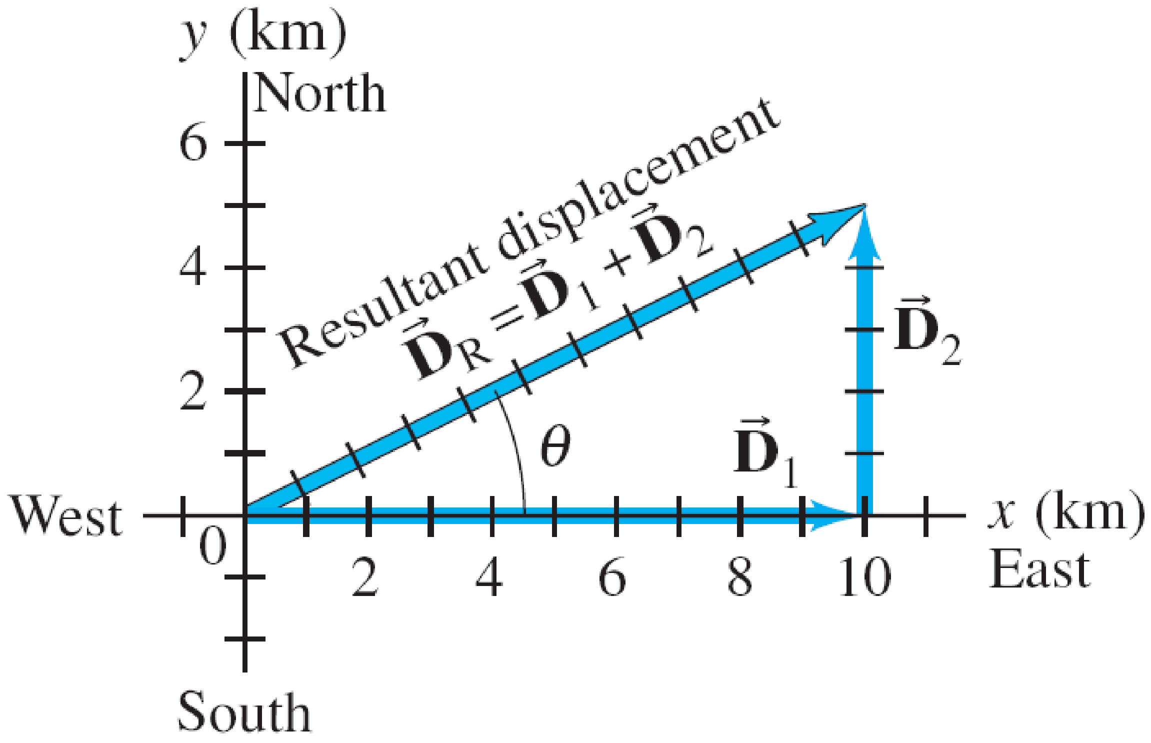
Προσοχή στο πρόσημο.

3-2 Πράξεις διανυσμάτων

Για 2 και 3 διαστάσεις το πρόβλημα γίνεται πιο σύνθετο.

Για κάθετα διανύσματα π.χ. κάνουμε χρήση του θεωρήματος του Πυθαγόρα.

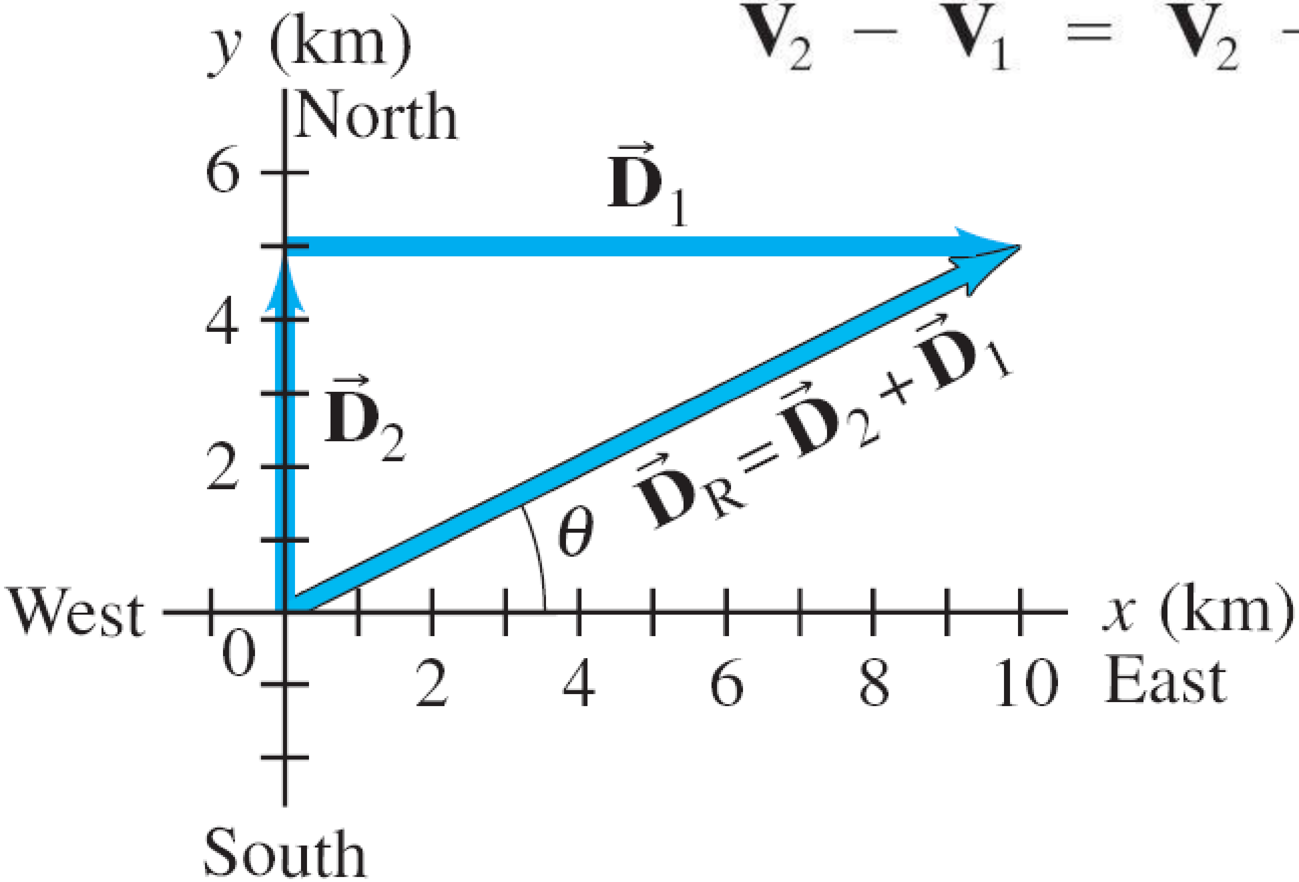
$$D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$$



3-2 Πράξεις διανυσμάτων

Για την πρόσθεση ισχύει η μεταθετική ιδιότητα (δεν έχει σημασία η σειρά):

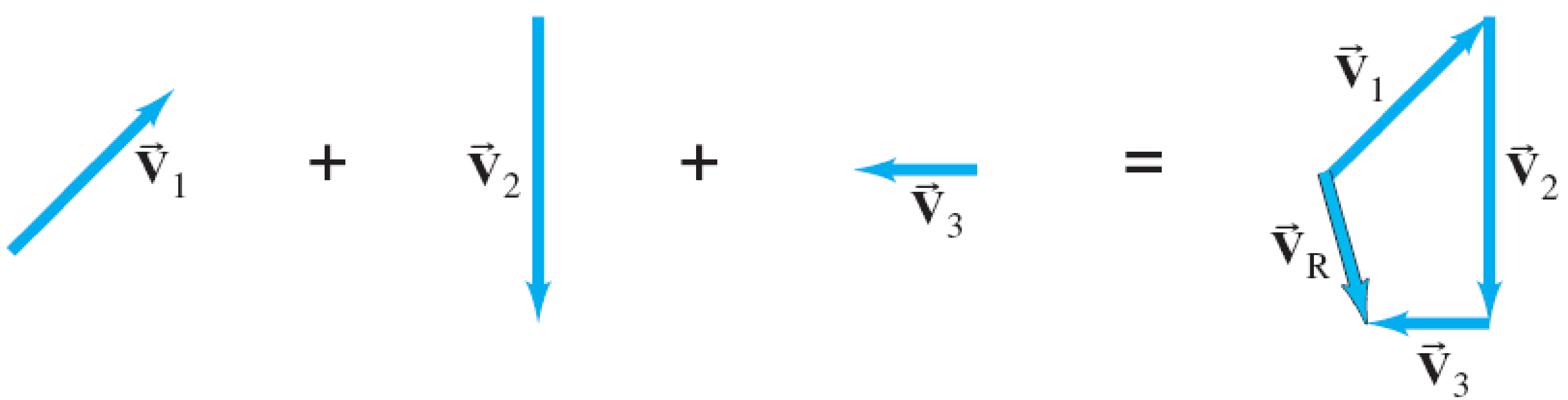
$$\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_1 = \vec{\mathbf{V}}_2 + (-\vec{\mathbf{V}}_1).$$



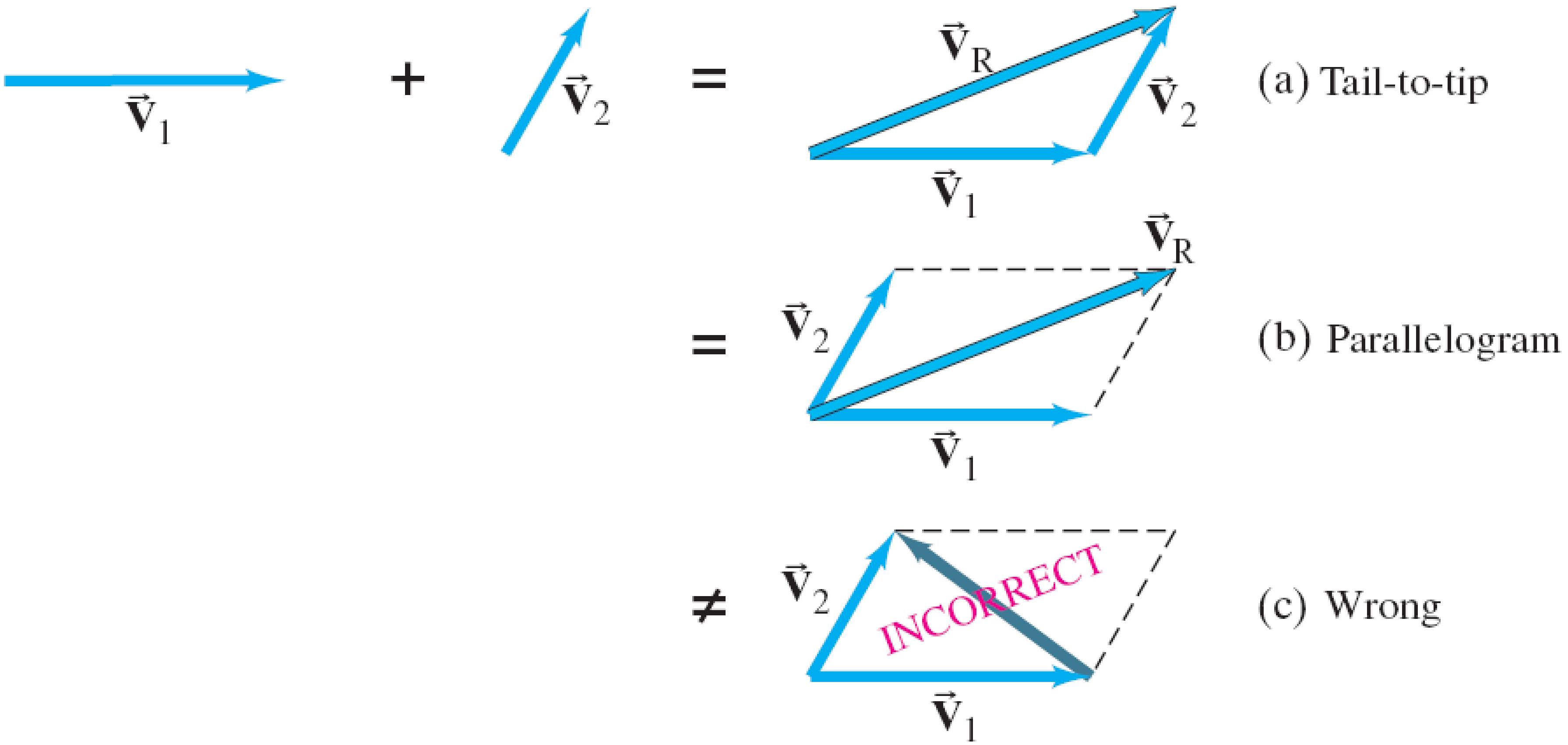
3-2 Πράξεις διανυσμάτων

Όταν τα διανύσαντα δεν είναι κάθετα τότε το άθροισα μα η διαφορά γίνεται με την εξής διαδικασία:

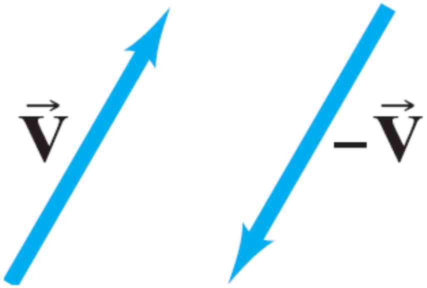
Στο τέλος του ενός «τοποθετούμε την αρχή του άλλου»



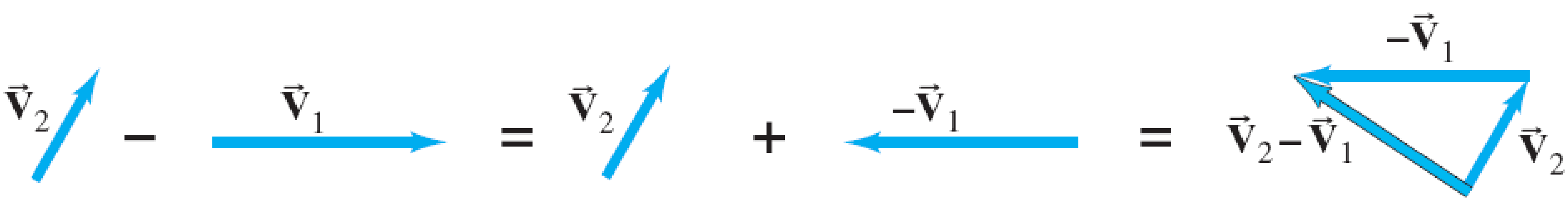
3-2 Πράξεις διανυσμάτων



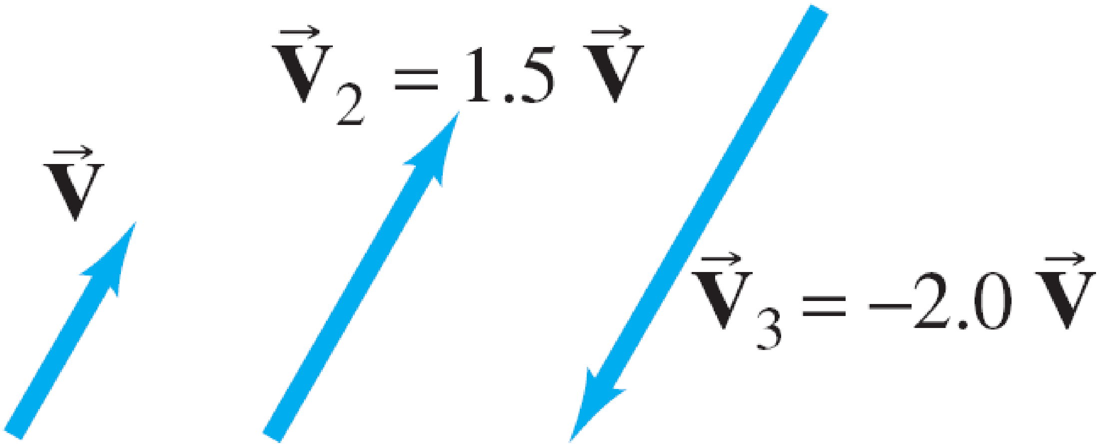
3-2 Πράξεις διανυσμάτων



Η αφαίρεση είναι όπως η πρόσθεση με αλλαγή διεύθυνσης του διανύσματος που «αφαιρείται»

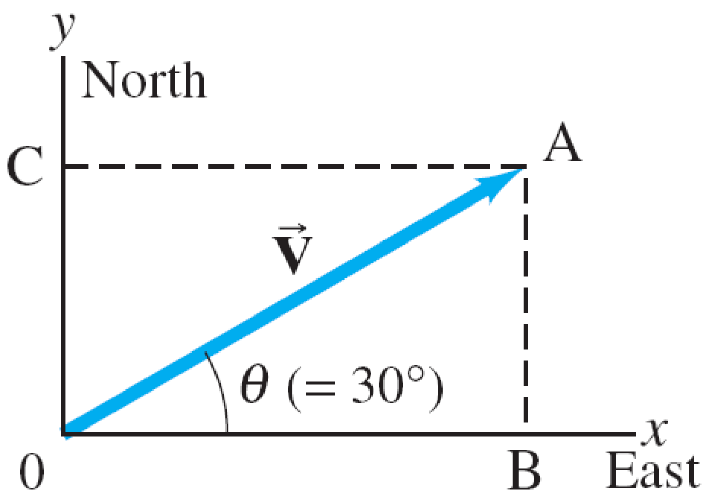


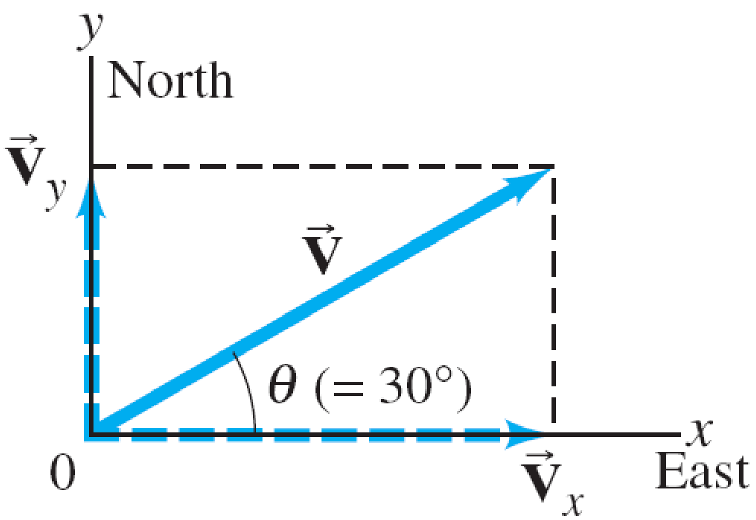
3-3 Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων με παράγοντα



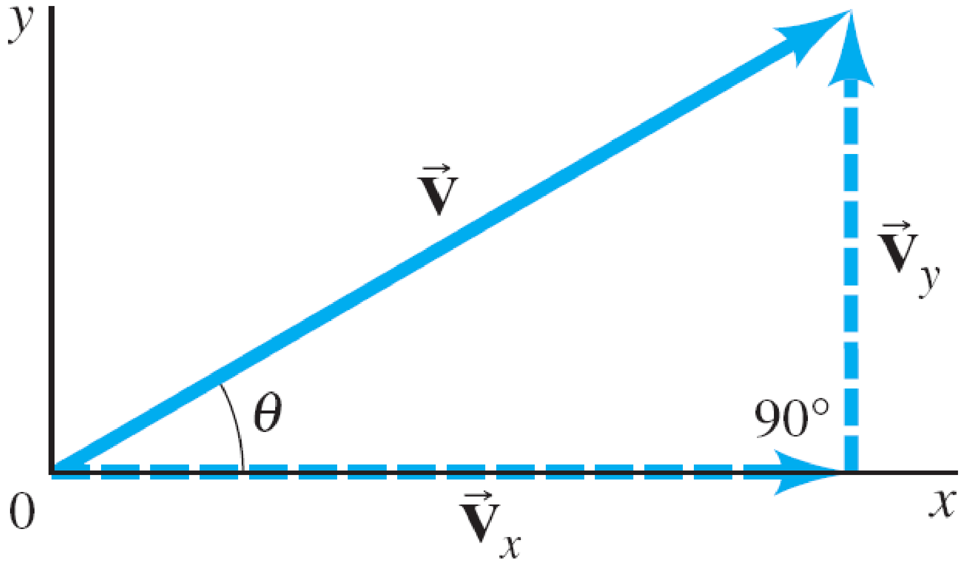
3-4 Ανάλυση διανύσματος σε Συνιστώσες για 2 Διαστάσεις

Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε 2 *κάθετες* συνιστώσες.





3-4 Ανάλυση διανύσματος σε Συνιστώσες για 2 Διαστάσεις



$$\sin\theta = \frac{V_y}{V}$$

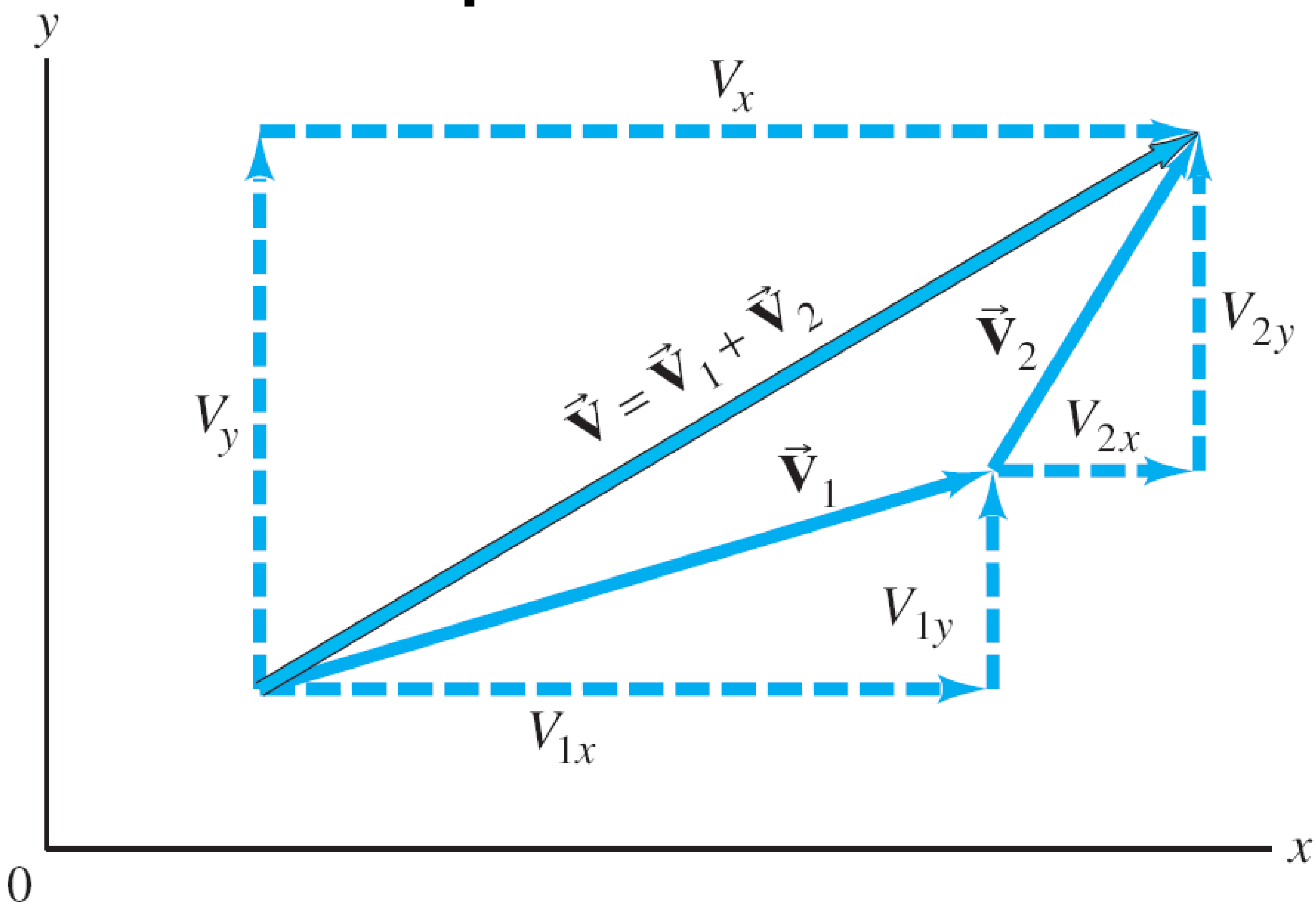
$$\cos\theta = \frac{V_x}{V}$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

3-4 Ανάλυση διανύσματος σε Συνιστώσες για 2 Διαστάσεις

Οι συνιστώσες είναι στην ουσία μονοδιάστατα διανύσματα και επομένως η πράξεις είναι απλές. Το τελικό αποτέλεσμα είναι

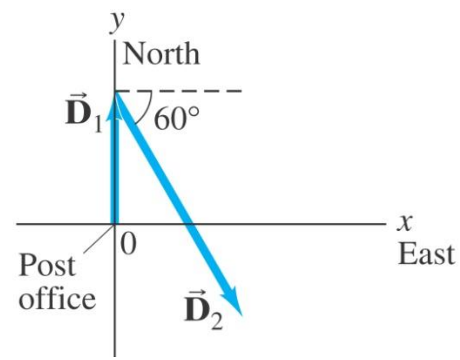


Άθροισμα διανυσμάτων:

1. Σχεδιάζουμε τα διανύσματα
2. Διαλέγουμε άξονες *x* και *y* (συντεταγμένες).
3. Αναλύσουμε τα διανύσματα στις επιμέρους συνιστώσες ως προς του άξονες *x* και *y*.
4. Υπολογίζουμε το μέτρο της κάθε συνιστώσες τριγωνομετρικά.
5. Προθέτουμε τις επιμέρους συνιστώσες ανά διεύθυνση.
6. Βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα ξανά τριγωνομετρικά

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

Ο ταχυδρόμος φεύγει από το ταχυδρομείο και οδηγεί 22.0 km προς τον Βορά. Στη συνέχεια κατευθύνεται 60.0° νοτιοανατολικά για 47.0 km. Βρείτε την τελική της μετατόπιση από το ταχυδρομείο.

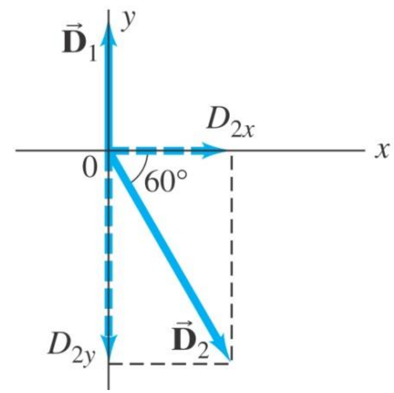


$$D_{1x} = 0, \qquad D_{1y} = 22.0\,\text{km}.$$

$\vec{\mathbf{D}}_2$ has both x and y components:

$$D_{2x} = +(47.0\,\text{km})(\cos 60°) = +(47.0\,\text{km})(0.500) = +23.5\,\text{km}$$

$$D_{2y} = -(47.0\,\text{km})(\sin 60°) = -(47.0\,\text{km})(0.866) = -40.7\,\text{km}.$$



Notice that D_{2y} is negative because this vector component points along the negative y axis. The resultant vector, $\vec{\mathbf{D}}$, has components:

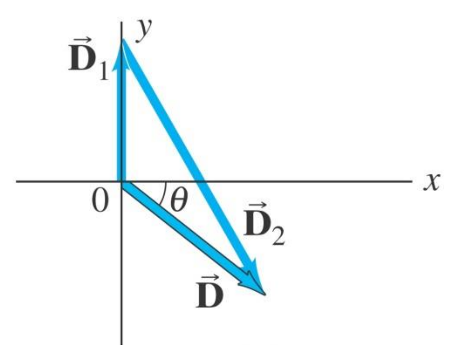
$$D_x = D_{1x} + D_{2x} = 0\,\text{km} + 23.5\,\text{km} = +23.5\,\text{km}$$

$$D_y = D_{1y} + D_{2y} = 22.0\,\text{km} + (-40.7\,\text{km}) = -18.7\,\text{km}.$$

This specifies the resultant vector completely:

$$D_x = 23.5\,\text{km}, \qquad D_y = -18.7\,\text{km}.$$

We can also specify the resultant vector by giving its magnitude and angle using Eqs. 3–3:

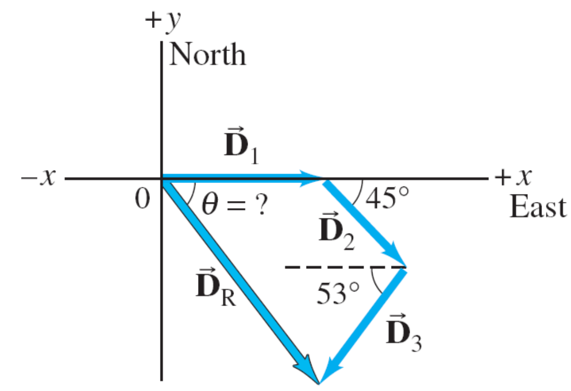


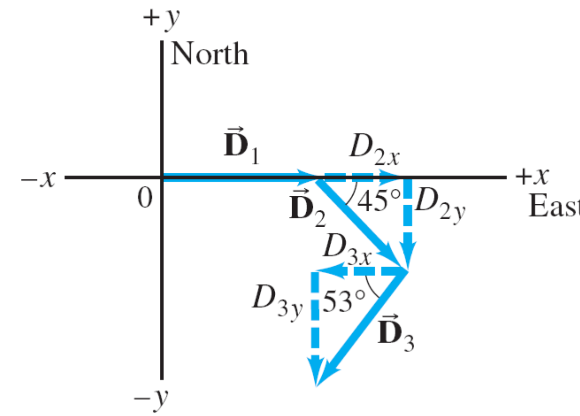
$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(23.5\,\text{km})^2 + (-18.7\,\text{km})^2} = 30.0\,\text{km}$$

$$\tan\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{-18.7\,\text{km}}{23.5\,\text{km}} = -0.796.$$

A calculator with an INV TAN, an ARC TAN, or a TAN^{-1} key gives $\theta = \tan^{-1}(-0.796) = -38.5°$. The negative sign means $\theta = 38.5°$ below the x axis, Fig. 3–13c. So, the resultant displacement is 30.0 km directed at 38.5° in a southeasterly direction.

Εάν ταξίδι με αεροπλάνο περιέχει τρεις στάσεις. Η πρώτη στάση 620 km ανατολικά. Η δεύτερη 440 km νοτιοανατολικά και η τρίτη 53° νοτιοδυτικά για 550 km. Βρείτε την μετατόπιση του αεροπλάνου.





1. **Draw a diagram** such as Fig. 3–14a, where $\vec{\mathbf{D}}_1$, $\vec{\mathbf{D}}_2$, and $\vec{\mathbf{D}}_3$ represent the three legs of the trip, and $\vec{\mathbf{D}}_R$ is the plane's total displacement.
2. **Choose axes:** Axes are also shown in Fig. 3–14a: x is east, y north.
3. **Resolve components:** It is imperative to draw a good diagram. The components are drawn in Fig. 3–14b. Instead of drawing all the vectors starting from a common origin, as we did in Fig. 3–13b, here we draw them "tail-to-tip" style, which is just as valid and may make it easier to see.
4. **Calculate the components:**

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{D}}_1: D_{1x} &= +D_1 \cos 0^\circ = D_1 = 620\text{ km} \\
D_{1y} &= +D_1 \sin 0^\circ = 0\text{ km} \\
\vec{\mathbf{D}}_2: D_{2x} &= +D_2 \cos 45^\circ = +(440\text{ km})(0.707) = +311\text{ km} \\
D_{2y} &= -D_2 \sin 45^\circ = -(440\text{ km})(0.707) = -311\text{ km} \\
\vec{\mathbf{D}}_3: D_{3x} &= -D_3 \cos 53^\circ = -(550\text{ km})(0.602) = -331\text{ km} \\
D_{3y} &= -D_3 \sin 53^\circ = -(550\text{ km})(0.799) = -439\text{ km}.
\end{aligned}$$

We have given a minus sign to each component that in Fig. 3–14b points in the $-x$ or $-y$ direction. The components are shown in the Table in the margin.

5. **Add the components:** We add the x components together, and we add the y components together to obtain the x and y components of the resultant:

$$\begin{aligned}
D_x &= D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = 620\text{ km} + 311\text{ km} - 331\text{ km} = 600\text{ km} \\
D_y &= D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = 0\text{ km} - 311\text{ km} - 439\text{ km} = -750\text{ km}.
\end{aligned}$$

The x and y components are 600 km and −750 km, and point respectively to the east and south. This is one way to give the answer.

6. **Magnitude and direction:** We can also give the answer as

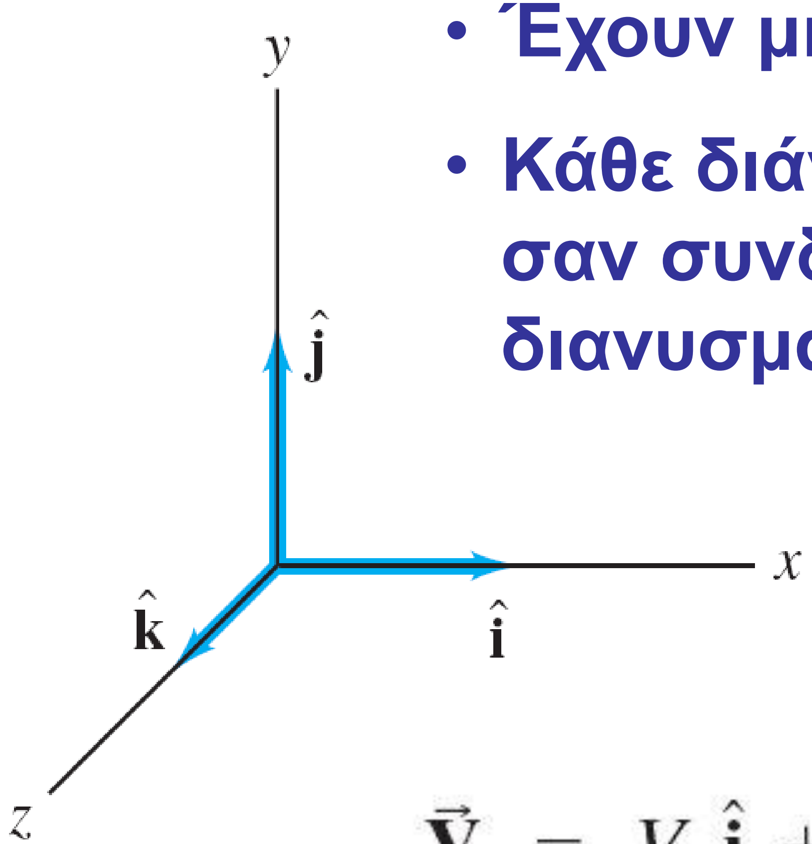
$$D_R = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(600)^2 + (-750)^2}\text{ km} = 960\text{ km}$$

$$\tan\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{-750\text{ km}}{600\text{ km}} = -1.25, \qquad \text{so } \theta = -51^\circ.$$

Thus, the total displacement has magnitude 960 km and points 51° below the x axis (south of east), as was shown in our original sketch, Fig. 3–14a.

Vector	**Components** x **(km)**	y **(km)**
$\vec{\mathbf{D}}_1$	620	0
$\vec{\mathbf{D}}_2$	311	−311
$\vec{\mathbf{D}}_3$	−331	−439
$\vec{\mathbf{D}}_R$	600	−750

3-5 Μοναδιαία Διανύσματα



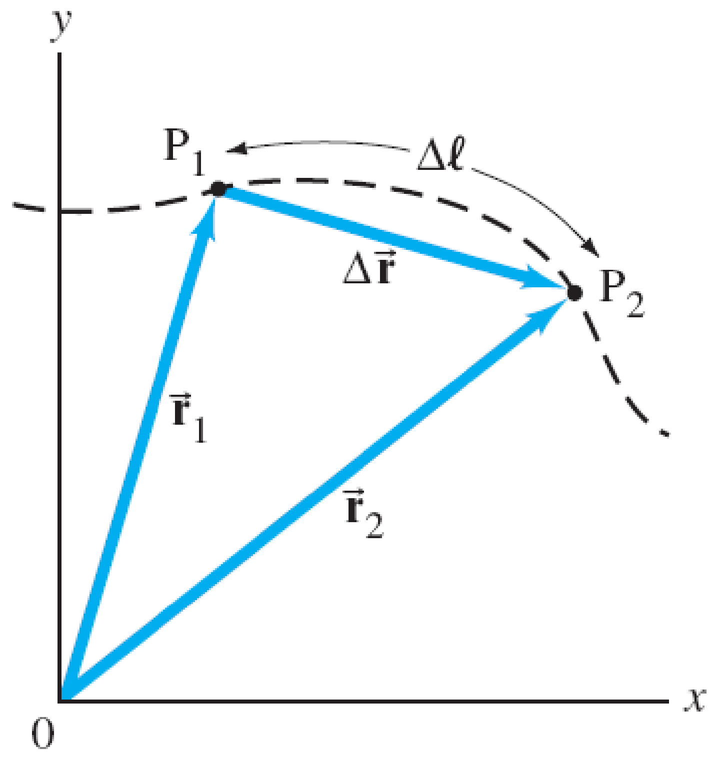
- Έχουν μήκος 1.
- Κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφτεί σαν συνδυασμός μοναδιαίων διανυσμάτων:

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x\hat{\mathbf{i}} + V_y\hat{\mathbf{j}} + V_z\hat{\mathbf{k}}.$$

3-6 Κινηματική Διανυσμάτων

Η μετατόπιση ενός διανύσματος δίδεται από την σχέση

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 .$$



Η ταχύτητα και η επιτάχυνση μπορούν να γραφτούν σαν συνάρτηση των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}};$$

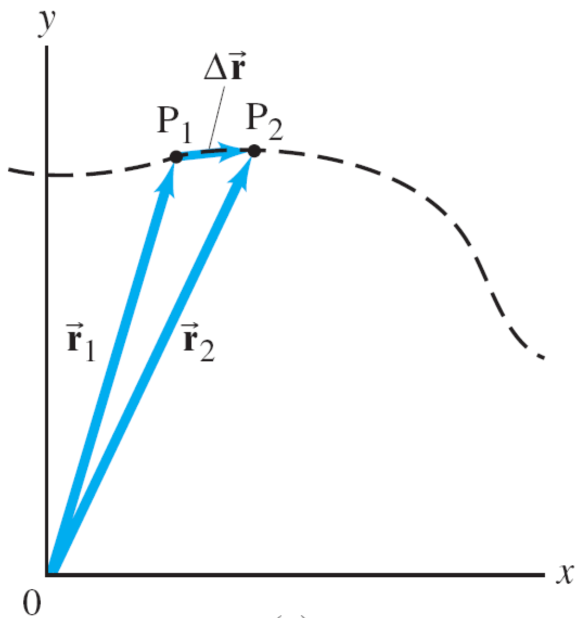
$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}.$$

TABLE 3–1 Kinematic Equations for Constant Acceleration in 2 Dimensions

x Component (horizontal)		y Component (vertical)
$v_x = v_{x0} + a_x t$	(Eq. 2–12a)	$v_y = v_{y0} + a_y t$
$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	(Eq. 2–12b)	$y = y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$
$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(Eq. 2–12c)	$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$

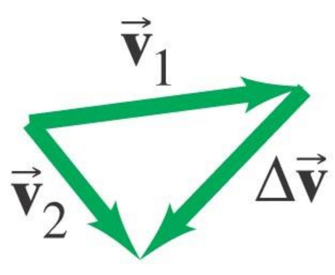
Η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται

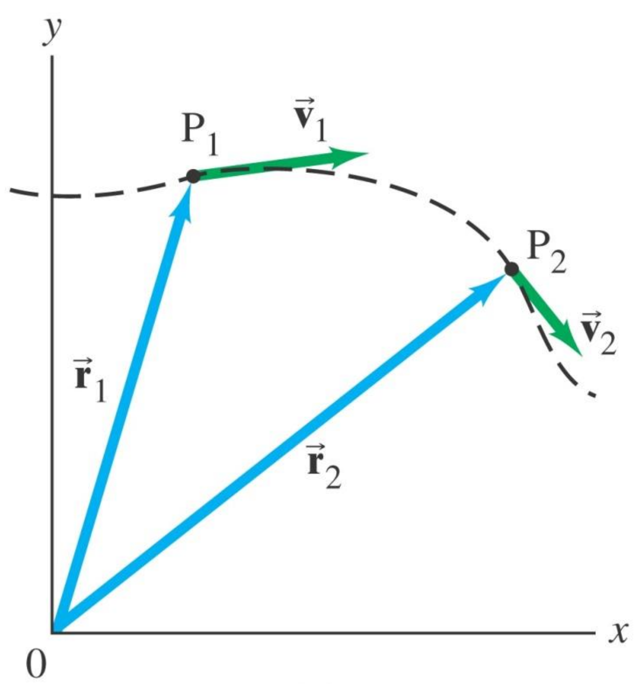
$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$



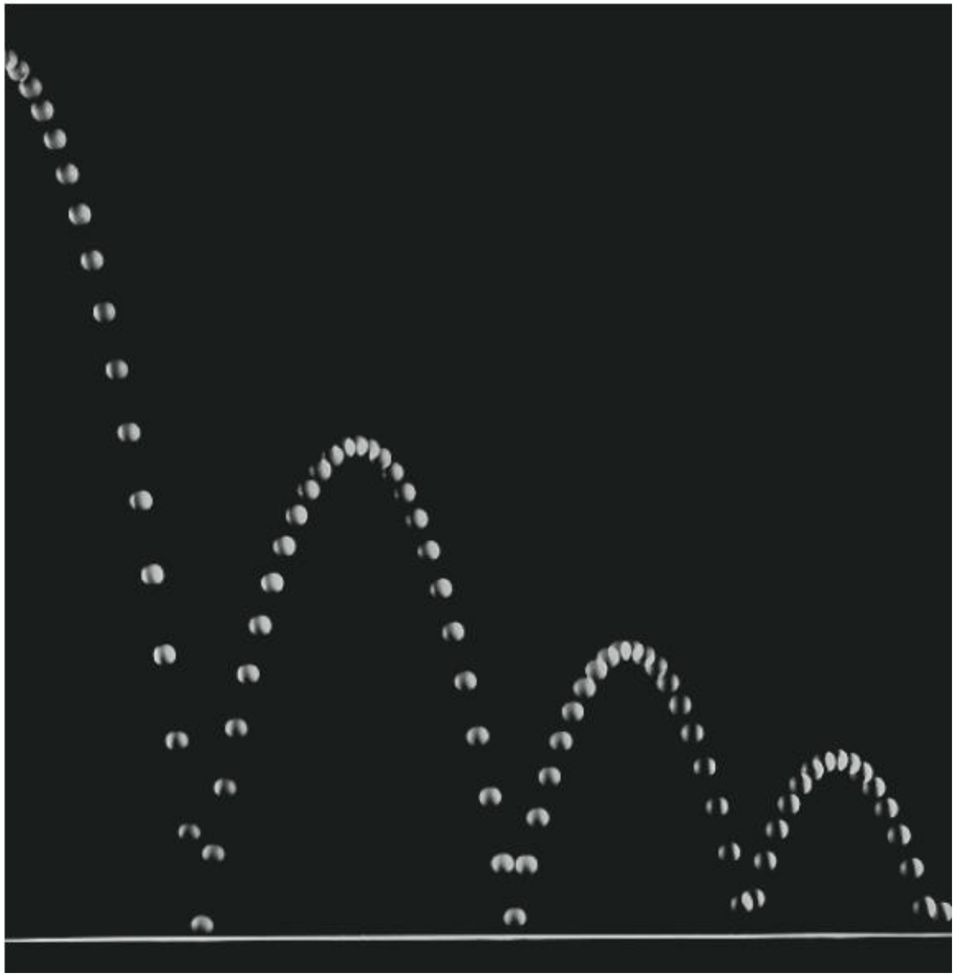
Η στιγμιαία επιτάχυνση ορίζεται

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$



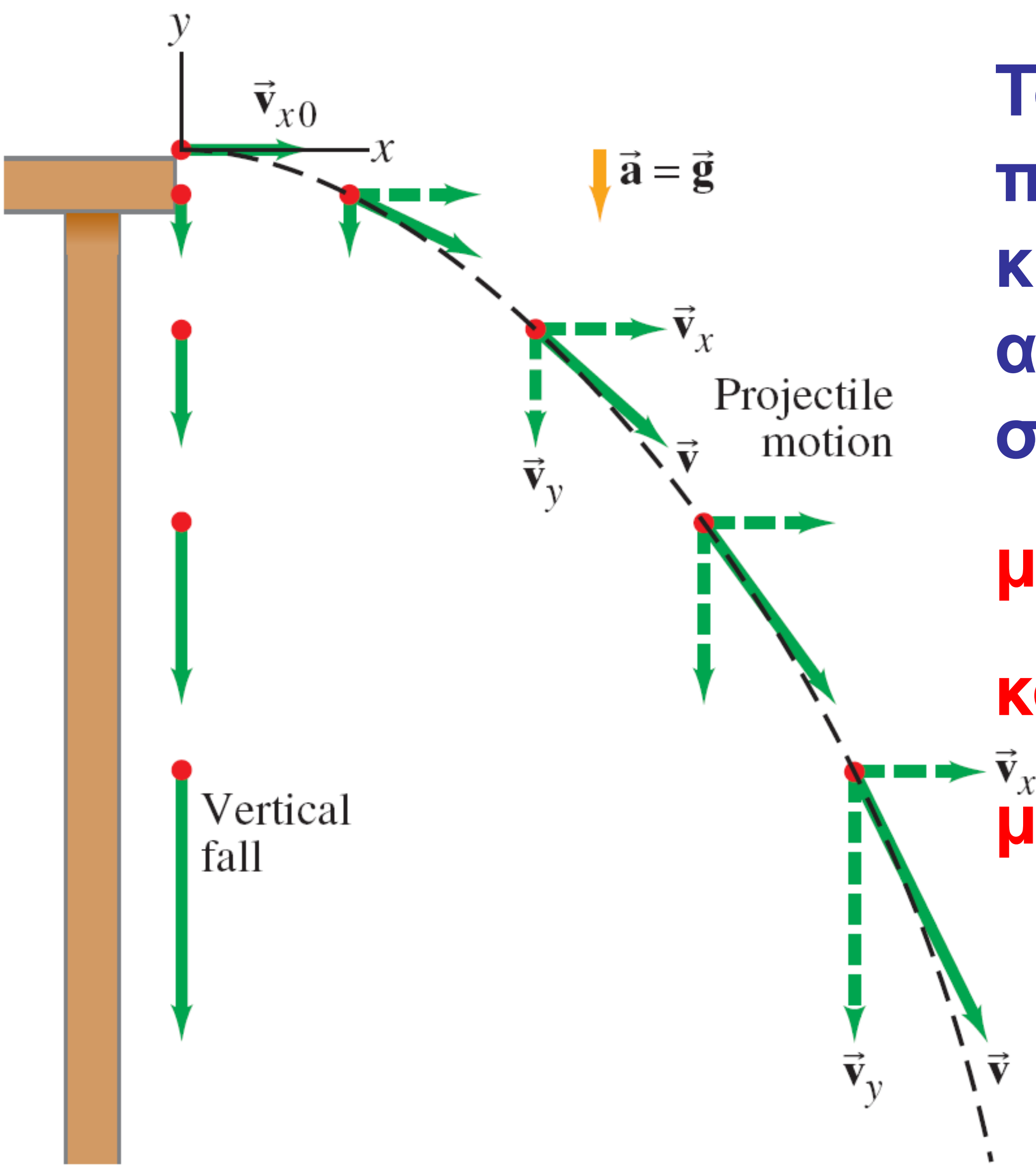


3-7 Κίνηση Βλημάτων



Το βλήμα είναι το σωματίδιο που κινείται σε δύο διαστάσεις λόγω της βαρύτητας της γης.

3-7 Κίνηση Βλημάτων

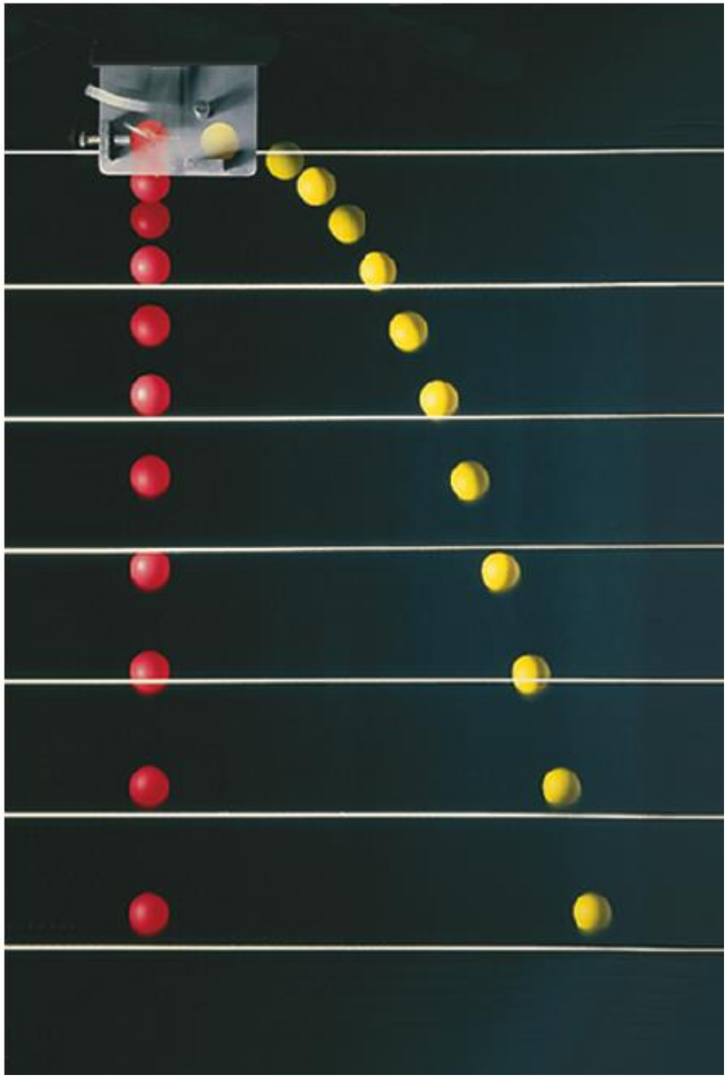


Το μυστικό επίλυσης, περιγραφή της κίνησης, είναι η ανάλυση της κίνησης σε δύο συνιστώσες:

μία οριζόντια

και

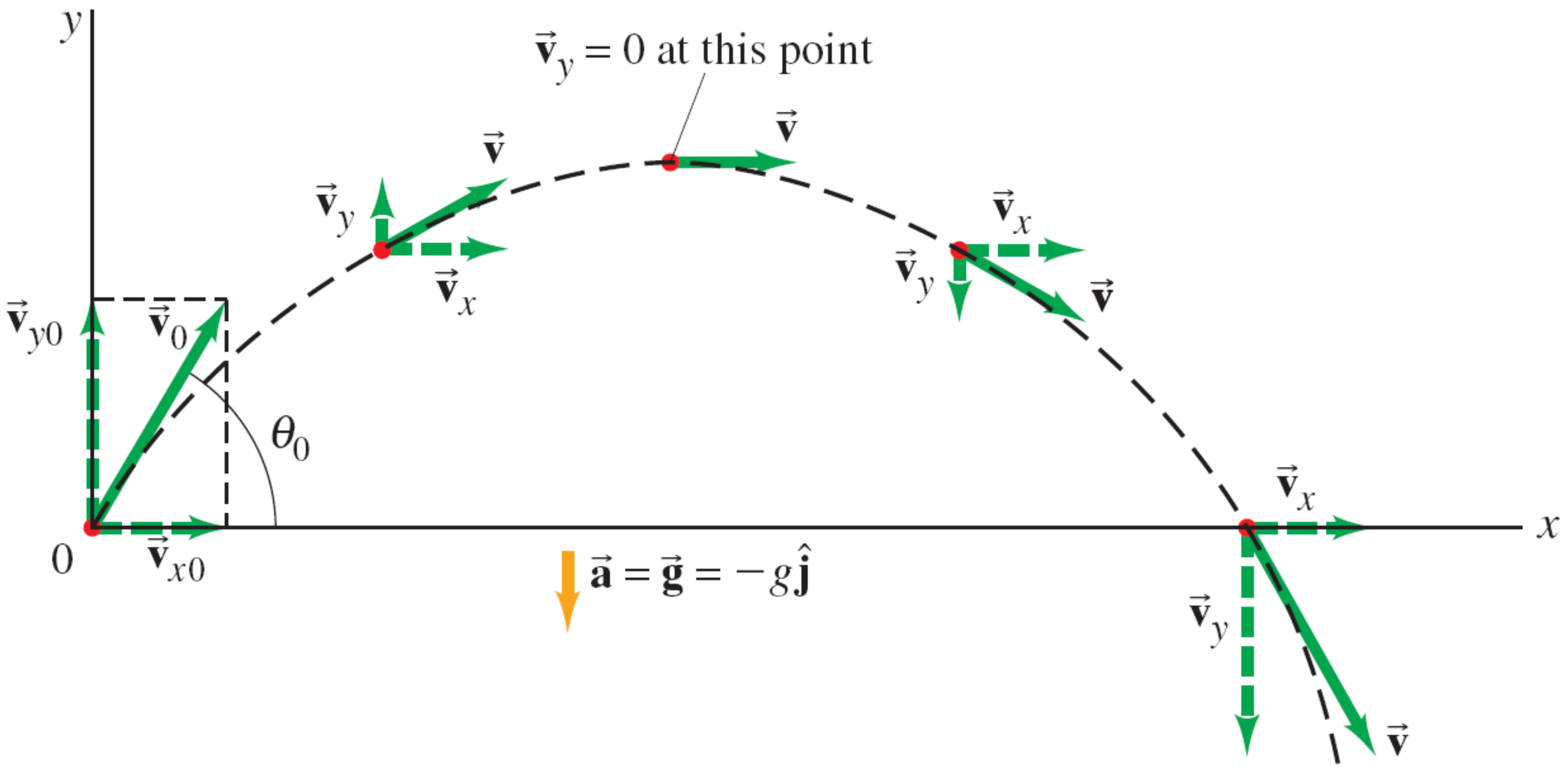
μια κατακόρυφη.



Η ταχύτητα στην οριζόντια διεύθυνση είναι σταθερή (x-συνιστώσα) ενώ στην κατακόρυφη συνιστώσα έχουμε κίνηση με σταθερή επιτάχυνση.

Στην φωτογραφία βλέπουμε ότι στη κάθετη διεύθυνση οι δύο μπάλες έχουν την ίδια μετατόπιση, αν και οι αρχικές ταχύτητές τους ήταν διαφορετικές.

Για εκτόξευση ενός αντικειμένου με αρχική γωνία θ_0, η διαδικασία ανάλυσης είναι ίδια με τη διαφορά ότι υπάρχει και κατακόρυφη συνιστώσα.



3-8 Επίλυση προβλημάτων κίνησης Βλημάτων

Η κίνηση των βλημάτων είναι κίνηση σε δύο διαστάσεις με σταθερή κατακόρυφη επιτάχυνση *g*

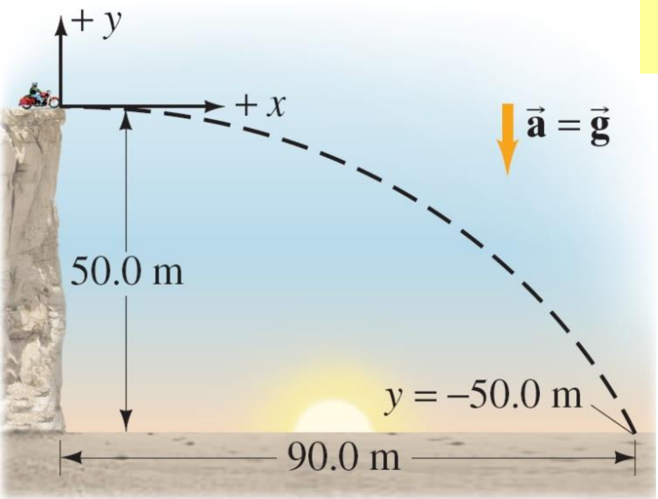
TABLE 3–2 Kinematic Equations for Projectile Motion
(y positive upward; $a_x = 0,\ a_y = -g = -9.80\ \mathrm{m/s^2}$)

Horizontal Motion ($a_x = 0$, v_x = constant)		Vertical Motion† ($a_y = -g$ = constant)
$v_x = v_{x0}$	(Eq. 2–12a)	$v_y = v_{y0} - gt$
$x = x_0 + v_{x0}t$	(Eq. 2–12b)	$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$
	(Eq. 2–12c)	$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$

† If y is taken positive downward, the minus (−) signs in front of g become plus (+) signs.

Ένας κασκαντέρ κάνει άλμα με μηχανή από ένα γκρεμό ύψους 50.0-m-. Με πόση ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί από τον γκρεμό ώστε να προσγειωθεί στα 90.0 m; (Αγνοούμε τη αντίσταση του αέρα

Ο χρόνος προσδιορίζεται πάντα από την κατακόρυφη συνιστώσα



Known	Unknown
$x_0 = y_0 = 0$	v_{x0}
$x = 90.0\ \mathrm{m}$	t
$y = -50.0\ \mathrm{m}$	
$a_x = 0$	
$a_y = -g = -9.80\ \mathrm{m/s^2}$	
$v_{y0} = 0$	

$$y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$
$$= 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-g)t^2$$

or

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2.$$

We solve for t and set $y = -50.0\ \mathrm{m}$:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{-g}} = \sqrt{\frac{2(-50.0\ \mathrm{m})}{-9.80\ \mathrm{m/s^2}}} = 3.19\ \mathrm{s}.$$

To calculate the initial velocity, v_{x0}, we again use Eq. 2–12b, but this time for the horizontal (x) direction, with $a_x = 0$ and $x_0 = 0$:

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$
$$= 0 + v_{x0}t + 0$$

or

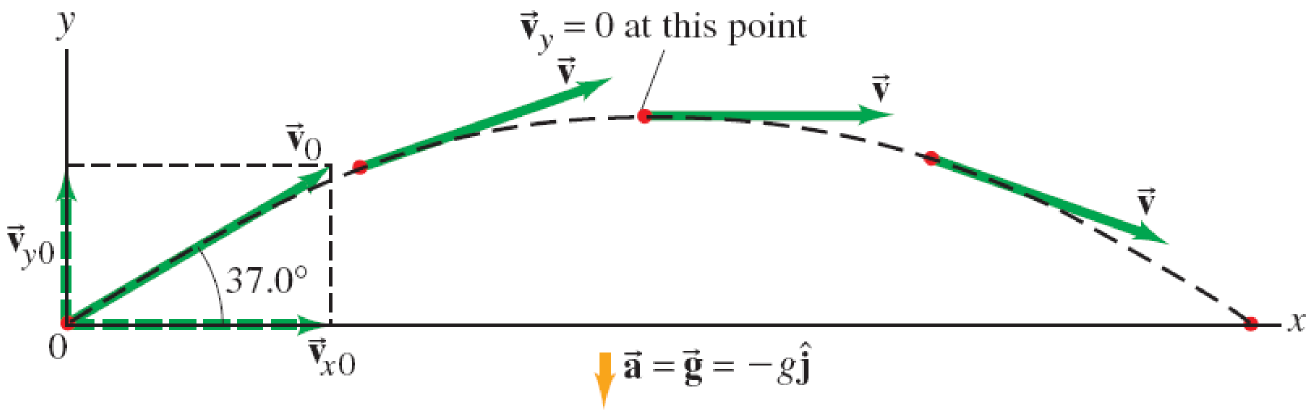
$$x = v_{x0}t.$$

Then

$$v_{x0} = \frac{x}{t} = \frac{90.0\ \mathrm{m}}{3.19\ \mathrm{s}} = 28.2\ \mathrm{m/s},$$

which is about 100 km/h (roughly 60 mi/h).

Κατά το ελεύθερο χτύπημα μιας μπάλας ποδοσφαίρου, αυτή φεύγει με γωνία θ_0 = 37.0° και με ταχύτητα 20.0 m/s. Βρείτε (α) το μέγιστο ύψος που θα φτάσει (β) το χρόνο πριν φτάσει στο έδαφος, (γ) πόσο μακριά θα φτάσει (δ) τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης στο μέγιστο ύψος. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα και ότι η μπάλα δεν περιστρέφεται.



SOLUTION We resolve the initial velocity into its components (Fig. 3–24):

$$v_{x0} = v_0 \cos 37.0° = (20.0\ \mathrm{m/s})(0.799) = 16.0\ \mathrm{m/s}$$
$$v_{y0} = v_0 \sin 37.0° = (20.0\ \mathrm{m/s})(0.602) = 12.0\ \mathrm{m/s}.$$

(*a*) We consider a time interval that begins just after the football loses contact with the foot until it reaches its maximum height. During this time interval, the acceleration is g downward. At the maximum height, the velocity is horizontal (Fig. 3–24), so $v_y = 0$; and this occurs at a time given by $v_y = v_{y0} - gt$ with $v_y = 0$ (see Eq. 2–12a in Table 3–2). Thus

$$t = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{(12.0\ \mathrm{m/s})}{(9.80\ \mathrm{m/s^2})} = 1.224\ \mathrm{s} \approx 1.22\ \mathrm{s}.$$

From Eq. 2–12b, with $y_0 = 0$, we have

$$y = v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$= (12.0\,\mathrm{m/s})(1.224\,\mathrm{s}) - \tfrac{1}{2}(9.80\,\mathrm{m/s^2})(1.224\,\mathrm{s})^2 = 7.35\,\mathrm{m}.$$

Alternatively, we could have used Eq. 2–12c, solved for y, and found

$$y = \frac{v_{y0}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(12.0\,\mathrm{m/s})^2 - (0\,\mathrm{m/s})^2}{2(9.80\,\mathrm{m/s^2})} = 7.35\,\mathrm{m}.$$

The maximum height is 7.35 m.

(*b*) To find the time it takes for the ball to return to the ground, we consider a different time interval, starting at the moment the ball leaves the foot $(t = 0,\ y_0 = 0)$ and ending just before the ball touches the ground ($y = 0$ again). We can use Eq. 2–12b with $y_0 = 0$ and also set $y = 0$ (ground level):

$$y = y_0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$0 = 0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

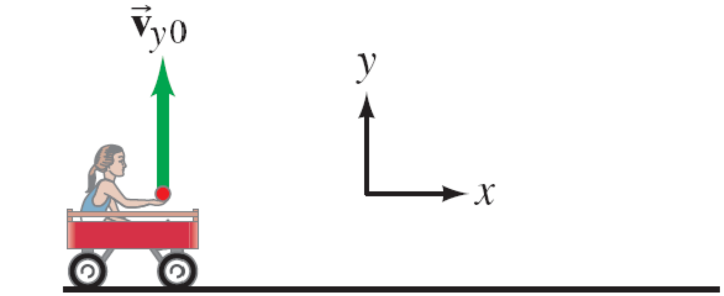
This equation can be easily factored:

$$t\left(\tfrac{1}{2}gt - v_{y0}\right) = 0.$$

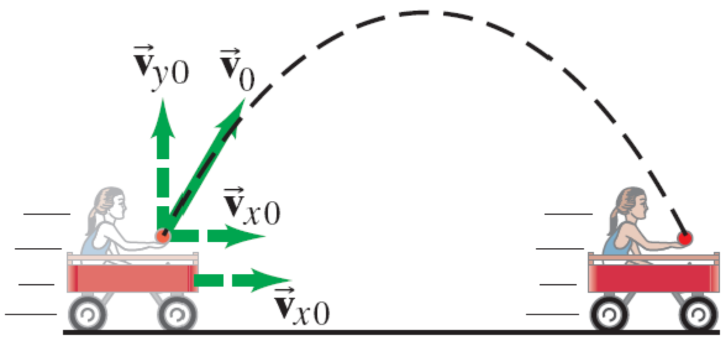
There are two solutions, $t = 0$ (which corresponds to the initial point, y_0), and

$$t = \frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2(12.0\,\mathrm{m/s})}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})} = 2.45\,\mathrm{s},$$

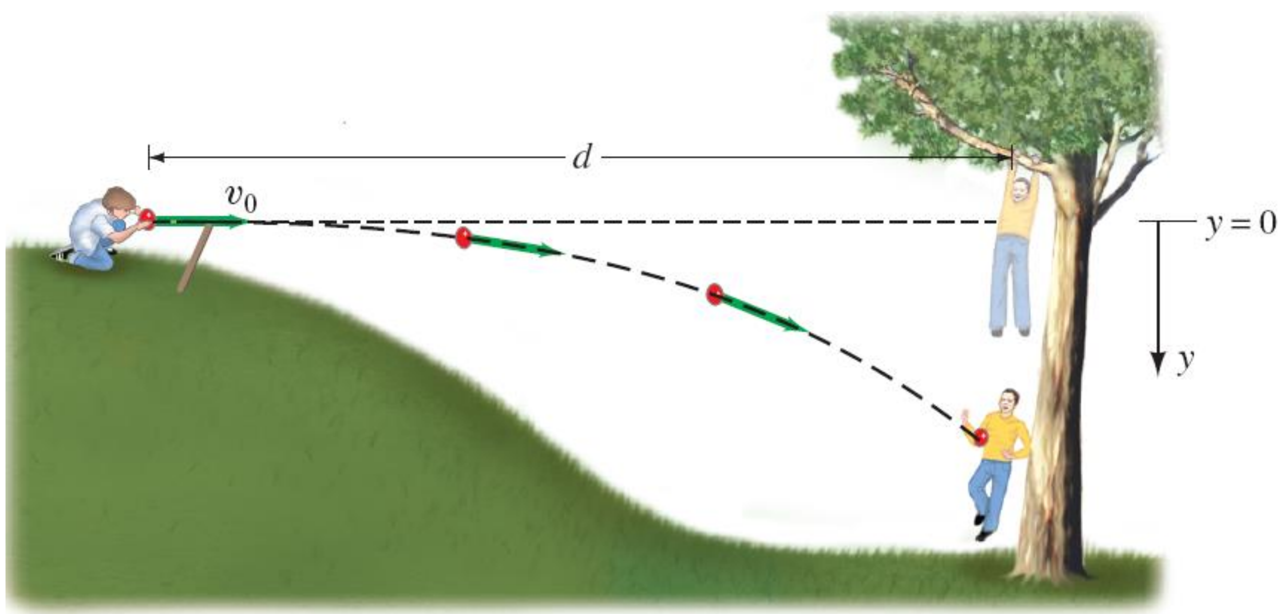
which is the total travel time of the football.



Wagon reference frame



Ground reference frame



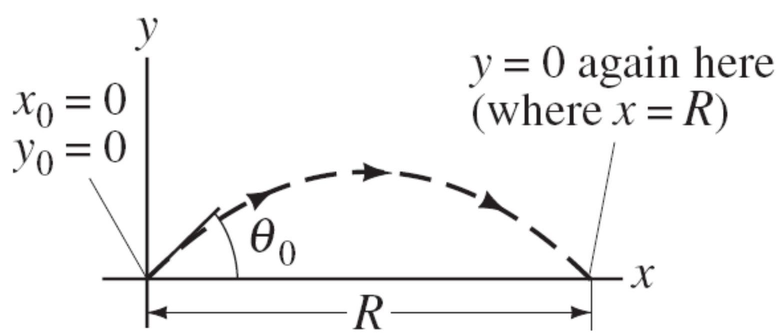
(α) Βρείτε την εξίσωση της «οριζόντιας απόστασης» R σαν συνάρτηση της αρχικής ταχύτητας v_0 και γωνίας εκτόξευσης θ_0. Σαν οριζόντια απόσταση ορίζουμε την οριζόντια απόσταση που διανύει το βλήμα πριν επιστρέψει στο ίδιο ύψος με αυτό από το οποίο εκτοξεύτηκε (y(final) = y_0). (β) Εάν υποθέσουμε ότι ένα κανόνι του Morozini, v_0 εκτοξεύει βλήματα με 60.0 m/s. Ποια πρέπει να είναι η αρχική γωνία για να χτυπήσει ένα στόχο 320 m μακριά?

Είχαμε δείξει ότι ο χρόνος στην μελέτη της ελεύθερης πτώσης ότι ο χρόνος άνω-κάτω είναι

$$t = \frac{2v_{oy}}{g} \Rightarrow t = \frac{2v_o \cos\theta_0}{g}$$

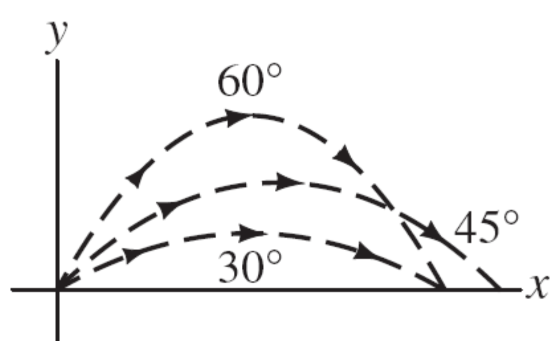
$$R = v_{ox} t = \frac{2v_o \cos\theta_0 v_0 \sin\theta_0}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

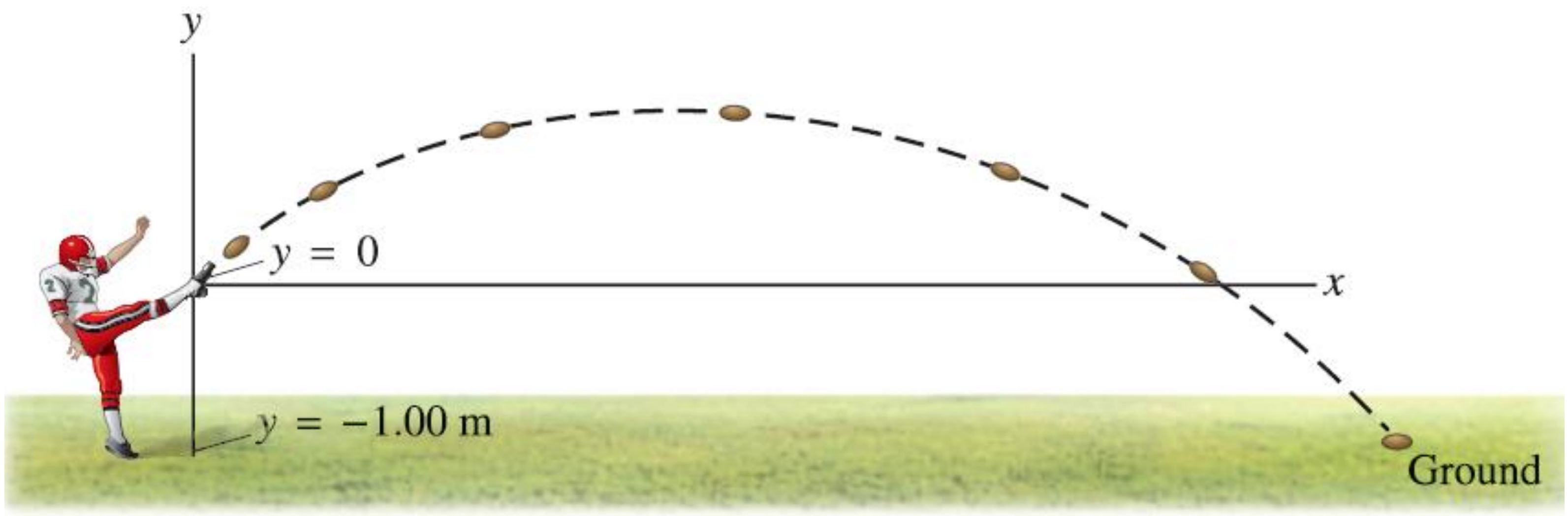


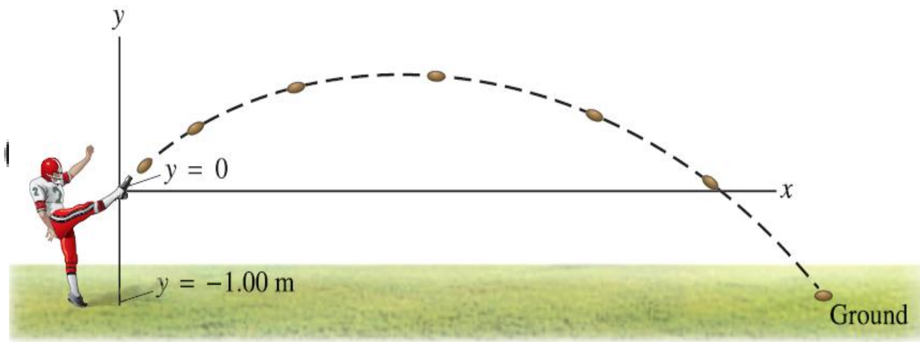
$$\sin 2\theta_0 = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{320m9{,}80m/s^2}{(60m/s)^2} = 0{,}871$$

$$2\theta_0 = \begin{cases} 60{,}6^\circ \\ 119{,}4^\circ \end{cases} \Rightarrow \theta_0 = \begin{cases} 30{,}3^\circ \\ 59{,}7^\circ \end{cases}$$



Υποθέτουμε ότι ένας ποδοσφαιριστής κλωτσάει μια μπάλα του από ύψος 1.00 m από την γη. Πόση απόσταση θα ταξιδέψει η μπάλα πριν χτυπήσει το έδαφος; Θέστε $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.





SOLUTION With $y = -1.00\,\mathrm{m}$ and $v_{y0} = 12.0\,\mathrm{m/s}$ (
the equation

$$y = y_0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

and obtain

$$-1.00\,\mathrm{m} = 0 + (12.0\,\mathrm{m/s})t - (4.90\,\mathrm{m/s^2})t^2.$$

We rearrange this equation into standard form $\left(ax^2 + bx + c = 0\right)$ so we can use the quadratic formula:

$$(4.90\,\mathrm{m/s^2})t^2 - (12.0\,\mathrm{m/s})t - (1.00\,\mathrm{m}) = 0.$$

The quadratic formula (Appendix A–1) gives

$$t = \frac{12.0\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{(-12.0\,\mathrm{m/s})^2 - 4(4.90\,\mathrm{m/s^2})(-1.00\,\mathrm{m})}}{2(4.90\,\mathrm{m/s^2})}$$

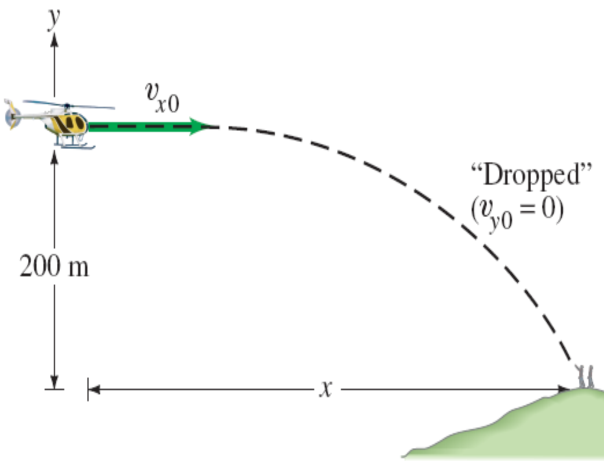
$$= 2.53\,\mathrm{s} \quad \text{or} \quad -0.081\,\mathrm{s}.$$

The second solution would correspond to a time prior to our chosen time interval that begins at the kick, so it doesn't apply. With $t = 2.53\,\mathrm{s}$ for the time at which the ball touches the ground, the horizontal distance the ball traveled is (using $v_{x0} = 16.0\,\mathrm{m/s}$ from Example 3–7):

$$x = v_{x0}t = (16.0\,\mathrm{m/s})(2.53\,\mathrm{s}) = 40.5\,\mathrm{m}.$$

Our assumption in Example 3–7 that the ball leaves the foot at ground level would result in an underestimate of about 1.3 m in the distance our punt traveled.

Ένα super-puma διάσωσης προσπαθεί να ρίξει προμήθειες σε κάποιους ορειβάτες που βρίσκονται παγιδευμένοι στην κορυφή ενός βουνού. Το ελικόπτερο πετάει 200 m πάνω από την κορυφή και με (οριζόντια) ταχύτητα 70 m/s (250 km/h), (α) σε ποια οριζόντια απόσταση από του ορειβάτες πρέπει να «ρίξει» τις προμήθειες (β) Εάν υποθέσουμε ότι το ελικόπτερο «εκτοξεύει» τις προμήθειες στα 400 m (οριζόντια απόσταση) από του ορειβάτες. Με τι ταχύτητα πρέπει αν εκτοξευτούν οι προμήθειες (γ) Με τι ταχύτητα φτάνουν οι προμήθειες στου ορειβάτες;



SOLUTION (*a*) We can find the time to reach the climbers using the vertical distance of 200 m. The package is "dropped" so initially it has the velocity of the helicopter, $v_{x0} = 70\,\mathrm{m/s}$, $v_{y0} = 0$. Then, since $y = -\frac{1}{2}gt^2$, we have

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{-2(-200\,\mathrm{m})}{9.80\,\mathrm{m/s^2}}} = 6.39\,\mathrm{s}.$$

The horizontal motion of the falling package is at constant speed of 70 m/s. So

$$x = v_{x0}t = (70\,\mathrm{m/s})(6.39\,\mathrm{s}) = 447\,\mathrm{m} \approx 450\,\mathrm{m},$$

assuming the given numbers were good to two significant figures.

(b) We are given $x = 400\text{ m}$, $v_{x0} = 70\text{ m/s}$, $y = -200\text{ m}$, and we want to find v_{y0} (see Fig. 3–29b). Like most problems, this one can be approached in various ways. Instead of searching for a formula or two, let's try to reason it out in a simple way, based on what we did in part (a). If we know t, perhaps we can get v_{y0}. Since the horizontal motion of the package is at constant speed (once it is released we don't care what the helicopter does), we have $x = v_{x0}t$, so

$$t = \frac{x}{v_{x0}} = \frac{400\text{ m}}{70\text{ m/s}} = 5.71\text{ s}.$$

Now let's try to use the vertical motion to get v_{y0}: $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$. Since $y_0 = 0$ and $y = -200\text{ m}$, we can solve for v_{y0}:

$$v_{y0} = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{-200\text{ m} + \frac{1}{2}(9.80\text{ m/s}^2)(5.71\text{ s})^2}{5.71\text{ s}} = -7.0\text{ m/s}.$$

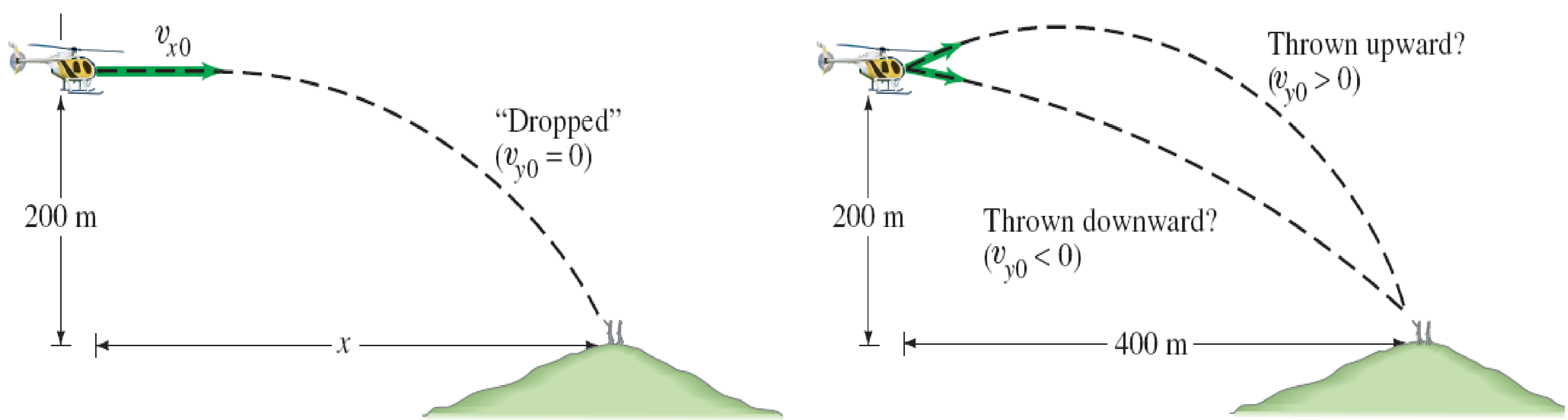
Thus, in order to arrive at precisely the mountain climbers' position, the package must be thrown *downward* from the helicopter with a speed of 7.0 m/s.

(c) We want to know v of the package at $t = 5.71\text{ s}$. The components are:

$$v_x = v_{x0} = 70\text{ m/s}$$

$$v_y = v_{y0} - gt = -7.0\text{ m/s} - (9.80\text{ m/s}^2)(5.71\text{ s}) = -63\text{ m/s}.$$

So $v = \sqrt{(70\text{ m/s})^2 + (-63\text{ m/s})^2} = 94\text{ m/s}$. (Better not to release the package from such an altitude, or use a parachute.)



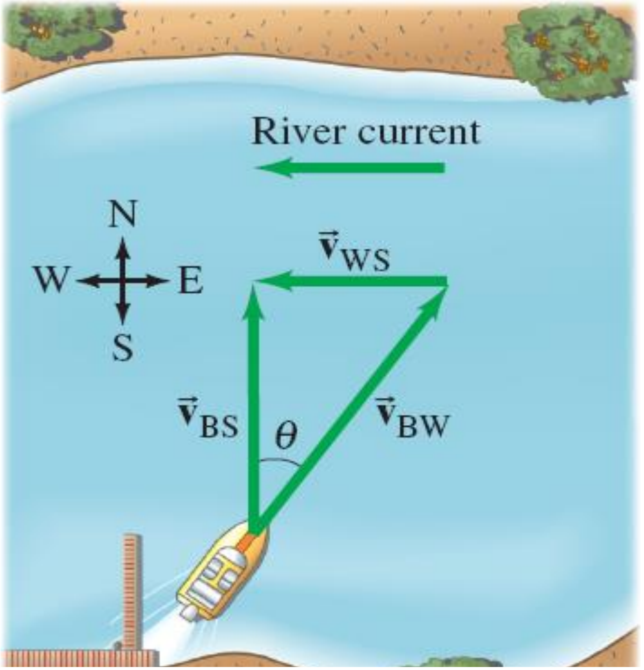
Παραδείγματα εφαρμογών (μη στρατιωτικών) .

Παρατηρείστε τις επιπτώσεις αντίστασης του αέρα.

3-9 Σχετική Ταχύτητα

Η σχετική ταχύτητα δύο διανυσμάτων είναι η διαφορά τους $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

Η ταχύτητα της βάρκας σε σχέση με το νερό είναι v_{BW} = 1.85 m/s. Εάν θέλουμε η βάρκα να κινηθεί ακριβώς απέναντι , ποια πρέπει να είναι η γωνία πλεύσης όταν η ταχύτητα του ποταμού είναι v_{WS} = 1.20 m/s

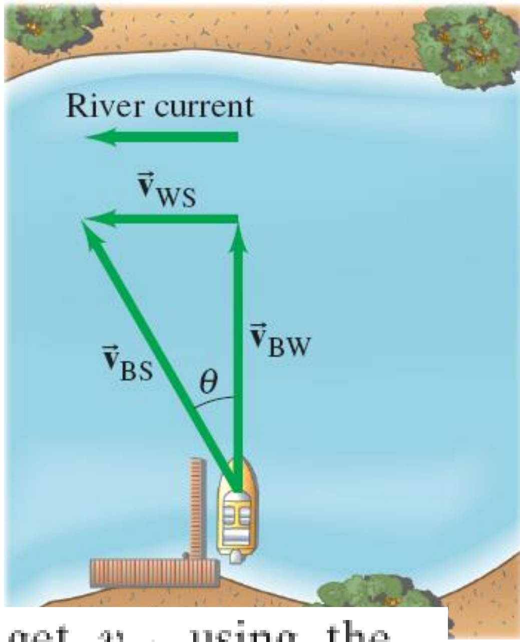


$$\vec{v}_{BS} = \vec{v}_{BW} + \vec{v}_{WS}$$

$$\sin\theta = \frac{v_{WS}}{v_{BW}} = \frac{1.20 \text{ m/s}}{1.85 \text{ m/s}} = 0.6486.$$

Thus $\theta = 40.4°$, so the boat must head upstream at a $40.4°$ angle.

Η βάρκα της προηγούμενης άσκησης (v_{BW} = 1.85 m/s) κατευθύνεται απέναντι ενός ρεύματος 1.20 m/s. (α) Ποια είναι η ταχύτητα (μέτρο και κατεύθυνση) σε σχέση με τη ακτή; (β) Εάν το πλάτος του ποταμού είναι 110 m πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να περάσει απέναντι και σε ποιο σημείο θα δέσει;



SOLUTION (*a*) Since $\vec{v}_{BW}$ is perpendicular to $\vec{v}_{WS}$, we can get v_{BS} using the theorem of Pythagoras:

$$v_{BS} = \sqrt{v_{BW}^2 + v_{WS}^2} = \sqrt{(1.85\,\mathrm{m/s})^2 + (1.20\,\mathrm{m/s})^2} = 2.21\,\mathrm{m/s}.$$

We can obtain the angle (note how θ is defined in the diagram) from:

$$\tan\theta = v_{WS}/v_{BW} = (1.20\,\mathrm{m/s})/(1.85\,\mathrm{m/s}) = 0.6486.$$

Thus $\theta = \tan^1(0.6486) = 33.0°$. Note that this angle is not equal to the angle calculated in Example 3–14.

(*b*) The travel time for the boat is determined by the time it takes to cross the river. Given the river's width $D = 110\,\mathrm{m}$, we can use the velocity component in the direction of D, $v_{BW} = D/t$. Solving for t, we get $t = 110\,\mathrm{m}/1.85\,\mathrm{m/s} = 59.5\,\mathrm{s}$. The boat will have been carried downstream, in this time, a distance

$$d = v_{WS}t = (1.20\,\mathrm{m/s})(59.5\,\mathrm{s}) = 71.4\,\mathrm{m} \approx 71\,\mathrm{m}.$$

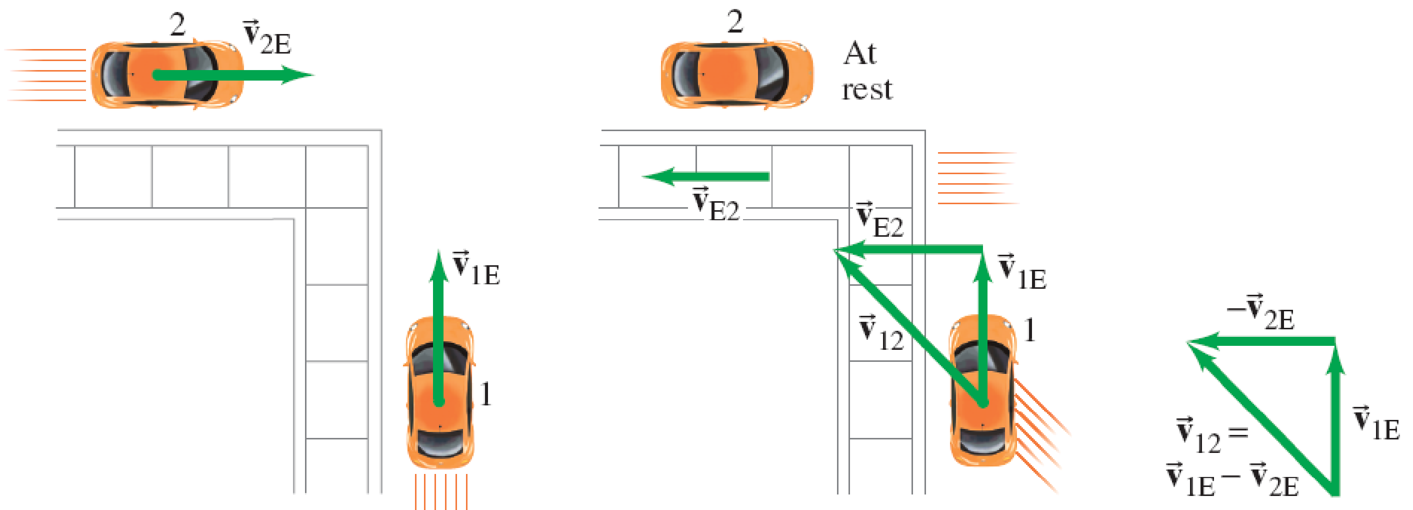
Βρείτε την σχετική ταχύτητα των δύο αυτοκινήτων σε στην διασταύρωση τα οποία κινούνται με 40.0 km/h. Ποια είναι η σχετική ταχύτητα σαν συνάρτηση της γωνία τους;

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1E} - \vec{v}_{2E} \Rightarrow \left(\vec{v}_{12}\right)^2 = \left(\vec{v}_{1E} - \vec{v}_{2E}\right)^2$$

$$\left(\vec{v}_{12}\right)^2 = \left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\vec{v}_{1E} \cdot \vec{v}_{2E}$$

$$= \left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right| \cos\theta$$

$$\left|\vec{v}_{12}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right| \cos\theta}$$



$$\left|\vec{v}_{12}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right|\cos\theta}$$

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \left|\vec{v}_{12}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right|\underbrace{\cos(0)}_{1}}$$

$$= \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right|} \underbrace{=}_{\left|v_{1E}\right| = \left|v_{2E}\right|} 0$$

$$\theta = 180^\circ \Rightarrow \left|\vec{v}_{12}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2 - 2\left|\vec{v}_{1E}\right|\left|\vec{v}_{2E}\right|\underbrace{\cos(180)}_{-1}} = 2\left|v_{1E}\right|$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \left|\vec{v}_{12}\right| = \sqrt{\left(\vec{v}_{1E}\right)^2 + \left(\vec{v}_{2E}\right)^2} = \left|v_{1E}\right|\sqrt{2}$$