2. Η πυκνότητα πιθανότητας $|\psi|^2$ γίνεται μέγιστη στο κέντρο του ατόμου H ($r = 0$) για τη θεμελιώδη κατάσταση, ενώ η ακτινική πυκνότητα πιθανότητας $P_r = 4\pi r^2|\psi|^2$ είναι μηδενική στο ίδιο σημείο. Εξηγήστε το λόγο που συμβαίνει αυτό.

Η ποσότητα $|\psi|^2$ είναι μέγιστη σε r = 0 λόγω της εξάρτησής της από το συντελεστή e^{-r/r_0}. Στην βασική (θεμελιώδη) κατάσταση, το ηλεκτρόνιο αναμένεται να βρεθεί κοντά στον πυρήνα. Η ακτινική πυκνότητα πιθανότητας αντιστοιχεί στην πιθανότητα το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε ένα λεπτό σφαιρικό φλοιό ακτίνας r. Δεδομένου ότι r = 0 είναι στο κέντρο του πυρήνα, η πυκνότητα ακτινικής πιθανότητας είναι μηδέν εδώ.

4. Το μέγεθος των ατόμων κυμαίνεται μόλις κατά έναν παράγοντα τρία ή περισσότερο, από το μεγαλύτερο στο μικρότερο, ωστόσο ο αντίστοιχος αριθμός ηλεκτρονίων μεταβάλλεται πάνω από το 100. Γιατί;

Καθώς ο αριθμός των ηλεκτρονίων αυξάνει, ο αριθμός των πρωτονίων στον πυρήνα αυξάνεται, γεγονός που αυξάνει την έλξη των ηλεκτρονίων προς το κέντρο του ατόμου. Ακόμα κι αν τα εσωτερικά ηλεκτρόνια θωρακίζουν μερικώς τα εξωτερικά ηλεκτρόνια από το αυξανόμενο πυρηνικό φορτίο από, όλα έλκονται πιο κοντά στον θετικότερο πυρήνα. Επίσης, περισσότερες καταστάσεις είναι διαθέσιμες στους εξωτερικούς φλοιούς για να δεχτούν πολύ περισσότερα ηλεκτρόνια σε περίπου την ίδια ακτίνα.

7. Γιατί από τη θεωρία του Schrödinger προκύπτουν τρεις κβαντικοί αριθμοί (αντί για π.χ. δυο ή τέσσερις);

Στην χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger, η κυματοσυνάρτηση και το δυναμικό εξαρτώνται από τις τρεις χωρικές μεταβλητές. Οι τρεις κβαντικοί αριθμοί προκύπτουν από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών στη κυματοσυνάρτηση σε κάθε διάσταση, m_l από την αζιμουθιακή γωνία φ (κίνηση σε δακτυλίδι) , *l* από την πολική γωνία ϑ. κίνηση σε επιφάνεια σφαίρας και n από την απόσταση από τον πυρήνα r.

9. Ποιες από τις ακόλουθες διατάξεις ηλεκτρονίων δεν επιτρέπονται: α) $1s^2 2s^2 2p^4 3s^2 4p^2$, β) $1s^2 2s^2 2p^8 3s^1$, γ) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^2 4d^5 4f^1$. Εάν δεν επιτρέπονται εξηγήστε το γιατί.

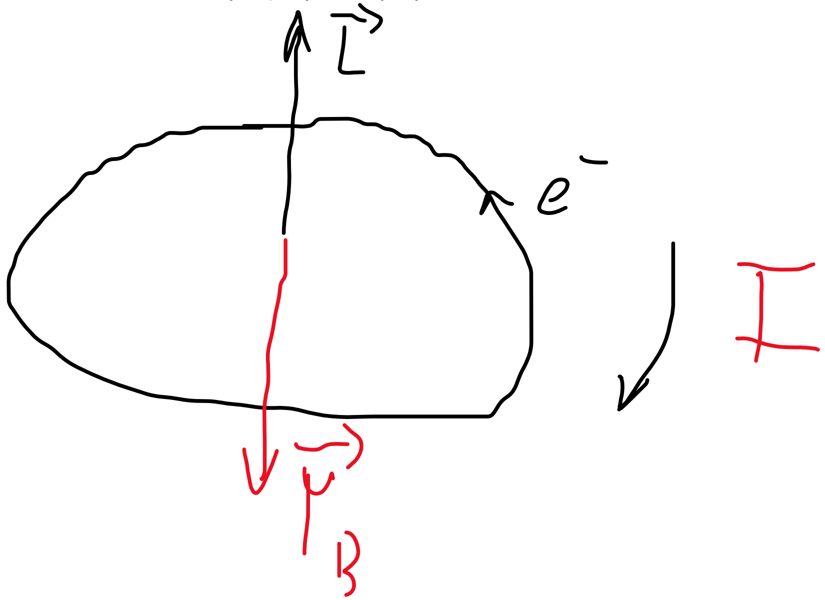
(α) και γ) επιτρέπονται για άτομα σε μια συγκινημένη κατάσταση. β) δεν επιτρέπεται. Μόνο έξι ηλεκτρόνια επιτρέπονται στην κατάσταση 2p

Δώστε την πλήρη διάταξη του ατόμου του ουρανίου

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^3 6s^2 6p^6 6d^1 7s^2$$

Γιατί η κατεύθυνση της μαγνητικής διπολικής ροπής ενός ηλεκτρονίου είναι αντίθετη αυτής της τροχιακής στροφορμής;

Το ρεύμα το έχουμε ορίσει ως η φορά κίνησης των θετικών φορτίων. Επομένως επειδή το ηλεκτρόνιο έχει αρνητικό φορτίο η φορά του ρεύματος I είναι ανάποδα προς την κίνηση.



Γιατί χρησιμοποιείται ένα μη ομογενές πεδίο στο πείραμα Stern-Gerlach;

Για το άτομο Ag στη θεμελιώδη κατάσταση θεωρούμε ότι ολόκληρη μαγνητική ροπή οφείλεται στην περιστροφή μόνο ενός από τα ηλεκτρόνιά του. Σε ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο, το μαγνητικό δίπολο θα βιώσει μια ροπή που θα τείνουν να το ευθυγραμμίσουν με το πεδίο. Σε ένα μη ομοιόμορφο πεδίο, κάθε πόλος του δίπολου θα βιώσει μια δύναμη διαφορετικού μεγέθους. Συνεπώς, το δίπολο θα βιώσει μια συνολική δύναμη που ποικίλλει ανάλογα με τον χωρικό προσανατολισμό του δίπολου. Το πείραμα Stern-Gerlach παρείχε τα πρώτα στοιχεία της χωρικής κβάντωσης, δεδομένου ότι έδειξε σαφώς ότι υπάρχουν δύο αντίθετοι προσανατολισμοί περιστροφής για το εξωτερικό ηλεκτρονίων για τον Ag.

3. (I) Πόσες διαφορετικές καταστάσεις είναι δυνατές για ένα ηλεκτρόνιο ο κύριος κβαντικός αριθμός του οποίου είναι $n = 5$; Γράψτε τους κβαντικούς αριθμούς για κάθε κατάσταση.

(n, l, m_l, m_s).

l=0…n-1 δηλ. l=0,1,2,3,4

Για κάθε l υπάρχουν 2l+1 m_l καταστάσεις, και κάθε μία έχει 2 επιλογές για το spin.

Οι συνολικές καταστάσεις θα είναι 2*(2*0+1)+2*(2*1+1)+2*(2*2+1)+2*(2*3+1)+2*(2*4+1)=2+6+10+14+18=50

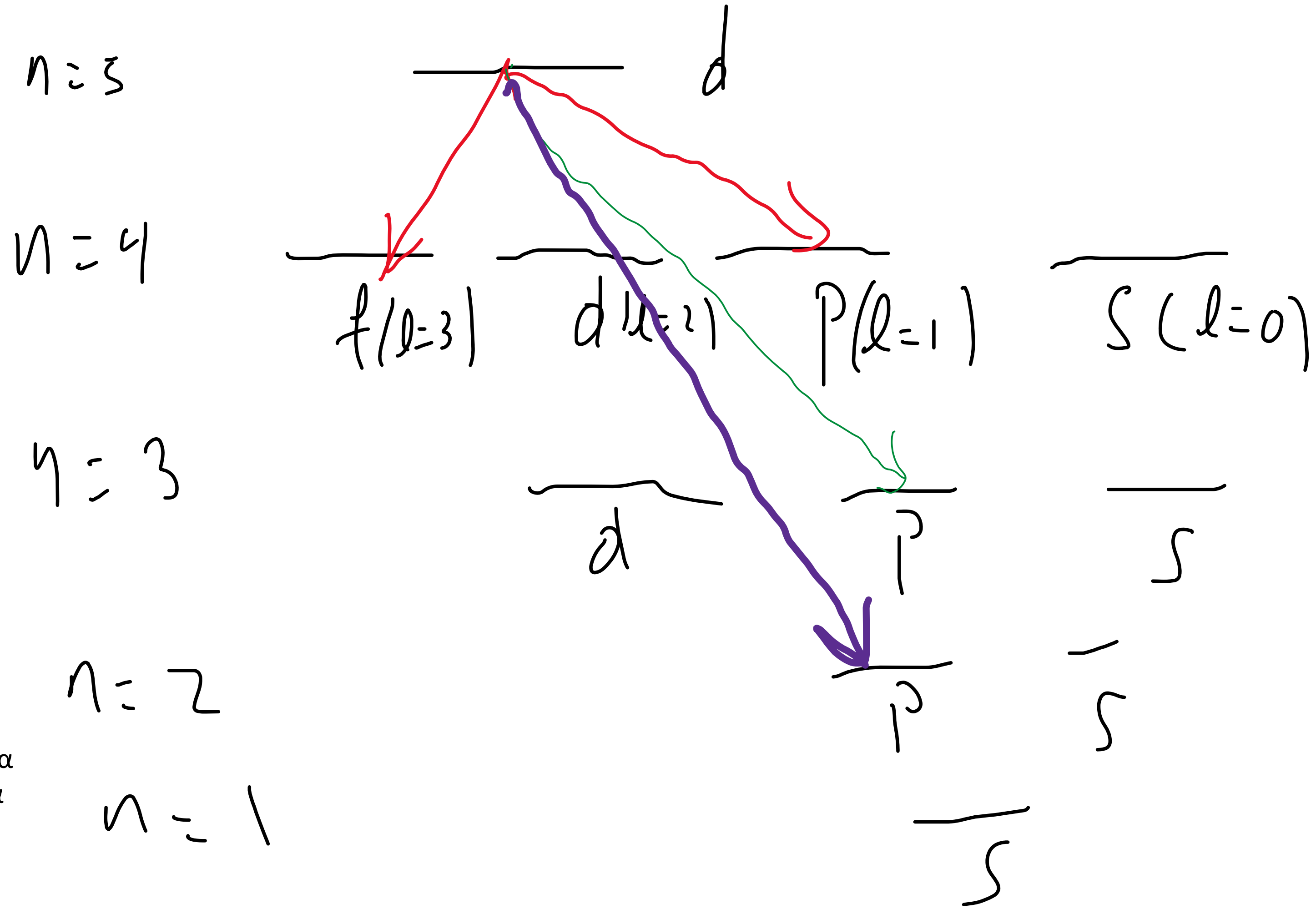
10. (II) Ένα διεγερμένο άτομο H βρίσκεται στην κατάσταση 5d α) Αναφέρετε όλες τις καταστάσεις, στις οποίες το άτομο «επιτρέπεται» να μεταπηδήσει με ταυτόχρονη εκπομπή ενός φωτονίου β) Πόσα διαφορετικά μήκη κύματος είναι δυνατά (αγνοήστε τη λεπτή υφή);

Εκπομπή φωτονίων σημαίνει μετάπτωση σε χαμηλότερη κατάσταση *n*, και συνεπώς η τελική κατάσταση, n = 1, 2, 3 ή 4.

$\Delta l = \pm 1$

$d \xrightarrow{+1} l = 3 \quad f$

$\xrightarrow{-1} l = 1 \quad p$



Υπάρχουν 4 μεταπτώσεις αλλά 3 μήκη κύματος μιας και απουσία μαγνητικών η ηλεκτρικών πεδίων το 4f και το 4p έχουν την ίδια ενέργεια μιας και έχουν τον ίδιο κύριο κβαντικό αριθμό.

12. (I) Δείξτε ότι η θεμελιώδης κατάσταση της κυματοσυνάρτησης, Εξ. 40.5, είναι κανονικοποιημένη. [*Υπόδειξη*: Βλ. το Παρ. 40.4].

$$\int_{\substack{\text{all}\\ \text{space}}} |\psi_{100}|^2 dV = \int_0^\infty \frac{1}{\pi r_0^3} e^{-\frac{2r}{r_0}} 4\pi r^2 dr \ ; \quad \text{let } x = \frac{2r}{r_0} \ \rightarrow \ r = \tfrac{1}{2} r_0 x \ , \ dr = \tfrac{1}{2} r_0 dx$$

$$\int_{\substack{\text{all}\\ \text{space}}} |\psi_{100}|^2 dV = \int_0^\infty \frac{1}{\pi r_0^3} e^{-\frac{2r}{r_0}} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{\pi r_0^3} \int_0^\infty e^{-x} \left(\tfrac{1}{4} r_0^2 x^2\right)\left(\tfrac{1}{2} r_0 dx\right) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx = \tfrac{1}{2}(2!) = 1$$

14. (II) Για την κατάσταση του υδρογόνου, $n = 2$, $\ell = 0$ ποια είναι η τιμή των α) ψ β) $|\psi|^2$ και γ) P_r σε $r = 4r_0$;

14. The state $n = 2, \ell = 0$ must have $m_\ell = 0$ and so the wave function is $\psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{32\pi r_0^3}}\left(2 - \frac{r}{r_0}\right) e^{-\frac{r}{2r_0}}$.

(a) $$\left(\psi_{200}\right)_{r=4r_0} = \frac{1}{\sqrt{32\pi r_0^3}}\left(2 - \frac{4r_0}{r_0}\right) e^{-\frac{4r_0}{2r_0}} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{8\pi r_0^3}} e^{-2}}$$

(b) $$\left(|\psi_{200}|^2\right)_{r=4r_0} = \frac{1}{32\pi r_0^3}\left(2 - \frac{4r_0}{r_0}\right)^2 e^{-2\frac{4r_0}{2r_0}} = \boxed{\frac{1}{8\pi r_0^3} e^{-4}}$$

(c) $$P_r = \left(4\pi r^2 |\psi_{200}|^2\right)_{r=4r_0} = 4\pi (4r_0)^2 \left(\frac{1}{8\pi r_0^3} e^{-4}\right) = \boxed{\frac{8}{r_0} e^{-4}}$$

16. (II) α) Δείξτε ότι η πιθανότητα να βρείτε το ηλεκτρόνιο στη θεμελιώδη κατάσταση του υδρογόνου σε μια απόσταση από τον πυρήνα μικρότερη από μια ακτίνα Bohr είναι 32%. β) Ποια είναι η πιθανότητα εύρεσης ενός ηλεκτρονίου $1s$ μεταξύ $r = r_0$ και $r = 2r_0$;

$$P = \int_0^{r_0} 4\frac{r^2}{r_0^3} e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \text{ ; let } x = 2\frac{r}{r_0}$$

$$P = \tfrac{1}{2}\int_0^2 x^2 e^{-x} dx = \tfrac{1}{2}\left[-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)\right]_0^2 = 1 - 5e^{-2} = 0.32 = \boxed{32\%}$$

(*b*) We follow the same process here.

$$P = \int_{r_0}^{2r_0} 4\frac{r^2}{r_0^3} e^{-\frac{2r}{r_0}} dr \text{ ; let } x = 2\frac{r}{r_0} \quad \rightarrow$$

$$P = \tfrac{1}{2}\int_2^4 x^2 e^{-x} dx = \tfrac{1}{2}\left[-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)\right]_2^4 = 5e^{-2} - 13e^{-4} = 0.44 = \boxed{44\%}$$

19. (II) Δείξτε ότι η μέση τιμή του r για ένα ηλεκτρόνιο στη θεμελιώδη κατάσταση του υδρογόνου είναι $\bar{r} = \frac{3}{2}r_0$, υπολογίζοντας το

$$\bar{r} = \int_{all\ space} r|\psi_{100}|^2 dV = \int_0^\infty r|\psi_{100}|^2 4\pi r^2 dr$$

$$\bar{r} = \int_0^\infty r|\psi_{100}|^2 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty r\frac{1}{\pi r_0^3} e^{-2\frac{r}{r_0}} 4\pi r^2 dr = 4\int_0^\infty \frac{r^3}{r_0^3} e^{-2\frac{r}{r_0}} dr \text{ ; let } x = 2\frac{r}{r_0} \quad \rightarrow$$

$$\bar{r} = \tfrac{1}{4}r_0 \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = \tfrac{1}{4}r_0(3!) = \boxed{\tfrac{3}{2}r_0}$$

25. (III) Δείξτε ότι το ψ_{100} (Εξ. 40.5α) ικανοποιεί την εξίσωση Schrödinger (Εξ. 40.1) για το δυναμικό Coulomb, για την ενέργεια $E = -me^4/8\epsilon_0^2 h^2$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_e r^2} + V(r) - E\right]R(r) = 0$$

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}} \quad , \ l = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi_{100}}{dr}\right) + \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E\right)\psi_{100}(r) = 0$$

$$r^2\frac{d}{dr}\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} r^2 \frac{d}{dr}\left(e^{-\frac{r}{r_0}}\right) = \frac{r^2}{\sqrt{\pi r_0^3}}\left(-\frac{1}{r_0}\right) e^{-r/r_0}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\psi_{100}\right) = -\frac{1}{r_0\sqrt{\pi r_0^3}}\frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-r/r_0}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r_0\sqrt{\pi r_0^3}}\left(2re^{-r/r_0} + r^2\left(-\frac{1}{r_0}\right)e^{-r/r_0}\right)$$

$$= -\frac{1}{r_0}\left(2r - \frac{r^2}{r_0}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-r/r_0}\right] = \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 2\frac{r}{r_0}\right)\psi_{100}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 2\frac{r}{r_0}\right)\psi_{100} + \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E\right)\psi_{100} = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} + \frac{\hbar^2}{mrr_0} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E = 0$$

$E \equiv$ ιδιοτιμή $\Rightarrow$ $E \equiv$ σταθερή τιμή $\Rightarrow$ δεν εξαρτάται από το r! $\Rightarrow$

$$\frac{\hbar^2}{mrr_0} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = 0 \Rightarrow \quad r_0 = \frac{4\pi\hbar^2\epsilon_0}{me^2} = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi m e^2}$$

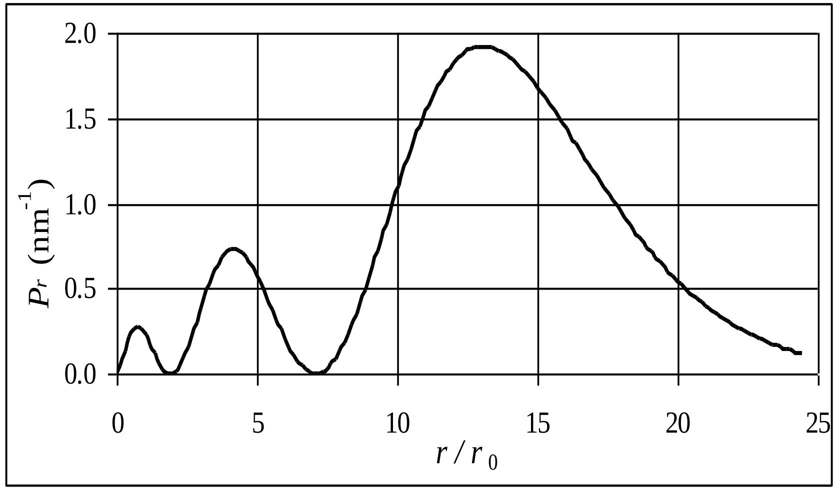
$$\Rightarrow \quad E = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} = -\frac{h^2}{2\,4\pi^2 m \,\frac{h^4\epsilon_0^2}{\pi^2 m^2 e^4}} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2}}$$

27. (III) Η κυματοσυνάρτηση για την κατάσταση ($n = 3$), $\ell = 0$, στο υδρογόνο είναι

$$\psi_{300} = \frac{1}{\sqrt{27\pi r_0^3}}\left(1 - \frac{2r}{3r_0} + \frac{2r^2}{27r_0^2}\right)e^{-\frac{r}{3r_0}}$$

α) Καθορίστε την πιθανότητα ακτινικής κατανομής P_r για αυτή την κατάσταση, και β) σχεδιάστε την καμπύλη της σε ένα διάγραμμα. γ) Καθορίστε την πιθανότερη απόσταση από τον πυρήνα για ένα ηλεκτρόνιο σε αυτή την κατάσταση.

$$P_r = 4\pi r^2 |\psi_{300}|^2 = 4\pi r^2 \frac{1}{27\pi r_0^3}\left(1 - \frac{2r}{3r_0} + \frac{2r^2}{27r_0^2}\right)^2 e^{-\frac{2r}{3r_0}} = \boxed{\frac{4r^2}{27r_0^3}\left(1 - \frac{2r}{3r_0} + \frac{2r^2}{27r_0^2}\right)^2 e^{-\frac{2r}{3r_0}}}$$



$$\frac{dP_r}{dr} = \frac{8r}{27r_0^3}\left(1 - \frac{2r}{3r_0} + \frac{2r^2}{27r_0^2}\right)^2 e^{-\frac{2r}{3r_0}} + \frac{8r^2}{27r_0^3}\left(1 - \frac{2r}{3r_0} + \frac{2r^2}{27r_0^2}\right)\left(-\frac{2}{3r_0} + \frac{4r}{27r_0^2}\right)e^{-\frac{2r}{3r_0}}$$

$$+ \frac{4r^2}{27r_0^3}\left(1 - \frac{2r}{3r_0} + \frac{2r^2}{27r_0^2}\right)^2\left(-\frac{2}{3r_0}\right)e^{-\frac{2r}{3r_0}}$$

$$= \underbrace{\frac{8r}{27r_0^3}}_{r=0 \text{ ελάχιστο}}\underbrace{\left(1 - \frac{2r}{3r_0} + \frac{2r^2}{27r_0^2}\right)}_{2 \text{ ελάχιστα}}\underbrace{\left(1 - \frac{5r}{3r_0} + \frac{12r^2}{27r_0^2} - \frac{2r^3}{81r_0^3}\right)}_{3 \text{ μέγιστα} \Rightarrow} e^{-\frac{2r}{3r_0}} = 0$$

β λύση: 3 ελάχιστα, 3 μέγιστα

$$\boxed{r = 13.1\, r_0}$$

28. (I) Απαριθμήστε τους κβαντικούς αριθμούς για κάθε ηλεκτρόνιο στη θεμελιώδη κατάσταση του οξυγόνου $(Z = 8)$

(n, l, m_l, m_s).

$$\boxed{\begin{array}{l}\left(1,0,0,-\tfrac{1}{2}\right),\left(1,0,0,+\tfrac{1}{2}\right),\left(2,0,0,-\tfrac{1}{2}\right),\left(2,0,0,+\tfrac{1}{2}\right),\\ \left(2,1,-1,-\tfrac{1}{2}\right),\left(2,1,-1,+\tfrac{1}{2}\right),\left(2,1,0,-\tfrac{1}{2}\right),\left(2,1,0,+\tfrac{1}{2}\right)\end{array}}$$

33. (II) Ποια είναι η πλήρης διάταξη ηλεκτρονίων για το α) νικέλιο (Ni), β) άργυρο (Ag), γ) ουράνιο (U); [*Υπόδειξη*: Βλ. Περιοδικό Πίνακα στο εσωτερικό του οπισθόφυλλου].

(a) νικέλιο (Ni), $Z = 28$.

$$\boxed{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^8 4s^2}$$

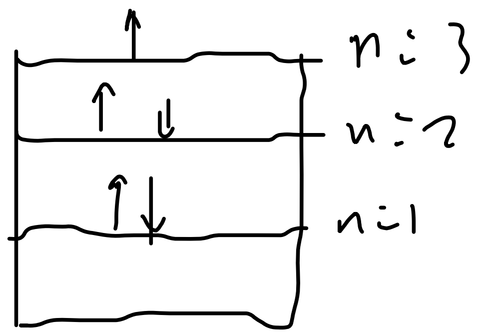
(b) άργυρο (Ag) $Z = 47$.

$$\boxed{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^1}$$

(c) ουράνιο (U), $Z = 92$.

$$\boxed{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 6s^2 6p^6 5f^3 6d^1 7s^2}$$

36. (II) Εφαρμόστε την απαγορευτική αρχή σε ένα απείρως υψηλό τετραγωνικό πηγάδι (Ενότητα 38-8). Θεωρήστε ότι σ'αυτό βρίσκονται πέντε ηλεκτρόνια που περιορίζονται σε αυτό το άκαμπτο κουτί πλάτους ℓ. Βρείτε την κατώτερη ενεργειακή κατάσταση αυτού του συστήματος, τοποθετώντας τα ηλεκτρόνια στις χαμηλότερες διαθέσιμες στάθμες, σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli.



$$E = 2E_1 + 2E_2 + E_3 = \left[2(1)^2 + 2(2^2) + 1(3)^2\right]\frac{h^2}{8ml^2} = \boxed{19\frac{h^2}{8ml^2}}$$

47. *(I) Εάν η κβαντική κατάσταση ενός ηλεκτρονίου καθορίζεται από τα (n, ℓ, m_ℓ, m_s), υπολογίστε την ενεργειακή διαφορά μεταξύ των καταστάσεων $(1,0,0,-\frac{1}{2})$ και $(1,0,0,+\frac{1}{2})$ ενός ηλεκτρονίου στην κατάσταση $1s$ του ηλίου μέσα σε ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο 2,5 T.

$$\Delta U = (\mu_z B)^{\text{spin down}}_{\text{spin up}} = -g\mu_B B\Delta m_s = -(2.0023)\frac{(9.27\times10^{-24}\ \text{J/T})}{(1.60\times10^{-19}\ \text{J/eV})}(2.5\,\text{T})(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}) = \boxed{2.9\times10^{-4}\,\text{eV}}$$

51. *(II) Ποιες είναι οι πιθανές τιμές του j για ένα ηλεκτρόνιο στην κατάσταση α) $4p$, β) $4f$ και γ) $3d$ του υδρογόνου; δ) Ποιο είναι το J σε κάθε περίπτωση;

51. (*a*) For the $4p$ state, $l = 1$. Since $s = \frac{1}{2}$, the possible values for j are $j = l + s = \boxed{\frac{3}{2}}$ and $j = l - s = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(*b*) For the $4f$ state, $l = 3$. Since $s = \frac{1}{2}$, the possible values for j are $j = l + s = \boxed{\frac{7}{2}}$ and $j = l - s = \boxed{\frac{5}{2}}$.

(*c*) For the $3d$ state, $l = 2$. Since $s = \frac{1}{2}$, the possible values for j are $j = l + s = \boxed{\frac{5}{2}}$ and $j = l - s = \boxed{\frac{3}{2}}$.

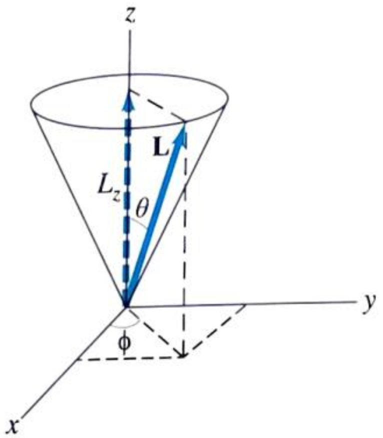
(*d*) The values of J are found from Eq. 39-15.

$$4p:\ \ J = \sqrt{j(j+1)}\hbar = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{2}\hbar \text{ and } \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar}$$

$$4f:\ \ J = \sqrt{j(j+1)}\hbar = \boxed{\frac{\sqrt{63}}{2}\hbar \text{ and } \frac{\sqrt{35}}{2}\hbar}$$

$$3d:\ \ J = \sqrt{j(j+1)}\hbar = \boxed{\frac{\sqrt{35}}{2}\hbar \text{ and } \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar}$$

69. Στο αποκαλούμενο **διανυσματικό μοντέλο** του ατόμου, η χωρική κβάντωση της στροφορμής (Σχ. 40.3) ερμηνεύεται, όπως φαίνεται από το Σχ. 40.28. Το διάνυσμα της στροφορμής μέτρου $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$ θεωρείται ότι μεταπίπτει γύρω από τον άξονα z (όπως μια περιστρεφόμενη σβούρα ή ένα γυροσκόπιο) κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η συνιστώσα z της στροφορμής, $L_z = m_\ell \hbar$ να παραμένει σταθερή. Υπολογίστε τις δυνατές τιμές για τη γωνία θ μεταξύ του $\mathbf{L}$ και του άξονα z α) για $\ell = 1$, β) $\ell = 2$ και γ) $\ell = 3$ δ) Καθορίστε την ελάχιστη τιμή του θ για $\ell = 100$ και $\ell = 10^6$. Είναι το αποτέλεσμα συνεπές με την αρχή της αντιστοιχίας;



ΣΧΗΜΑ 40.28. Το διανυσματικό μοντέλο για την τροχιακή στροφορμή. Το διάνυσμα της τροχιακής στροφορμής $\mathbf{L}$ θεωρούμε ότι μεταπίπτει ως προς τον άξονα z. Τα L και L_z παραμένουν σταθερά, αλλά το L_x και το L_y μεταβάλλονται διαρκώς. Προβλήματα 69 και 70.

69. The magnitude of the angular momentum is given by Eq. 39-3, and L_z is given by Eq. 39-4. The cosine of the angle between $\vec{\mathbf{L}}$ and the z axis is found from L and L_z.

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \ ; \ L_z = m_\ell \hbar \ ; \ \theta = \cos^{-1}\frac{L_z}{L} = \cos^{-1}\frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$$

(*a*) For $\ell = 1$, $m_\ell = -1, 0, 1$.

$$\theta_{1,1} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{45^\circ} \ ; \ \theta_{1,0} = \cos^{-1}\frac{0}{\sqrt{2}} = \boxed{90^\circ} \ ;$$

$$\theta_{1,-1} = \cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{2}} = \boxed{135^\circ}$$

(*b*) For $\ell = 2$, $m_\ell = -2, -1, 0, 1, 2$.

$$\theta_{2,2} = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{35.3^\circ} \ ; \ \theta_{2,1} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{65.9^\circ} \ ; \ \theta_{2,0} = \cos^{-1}\frac{0}{\sqrt{2}} = \boxed{90^\circ}$$

$$\theta_{2,-1} = \cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{6}} = \boxed{114.1^\circ} \ ; \ \theta_{2,2} = \cos^{-1}\frac{-2}{\sqrt{6}} = \boxed{144.7^\circ}$$

(*c*) For $\ell = 3$, $m_\ell = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

$$\theta_{3,3} = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{12}} = \boxed{30^\circ} \ ; \ \theta_{3,2} = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{12}} = \boxed{54.7^\circ} \ ; \ \theta_{3,1} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{12}} = \boxed{73.2^\circ}$$

$$\theta_{3,0} = \cos^{-1}\frac{0}{\sqrt{12}} = \boxed{90^\circ} \ ; \ \theta_{3,-1} = \cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{12}} = \boxed{106.8^\circ} \ ; \ \theta_{3,-2} = \cos^{-1}\frac{-2}{\sqrt{12}} = \boxed{125.3^\circ} \ ;$$

$$\theta_{3,-3} = \cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{12}} = \boxed{150^\circ}$$

(*d*) We see from the previous parts that the smallest angle occurs for $m_\ell = \ell$.

$$\theta_{100,100} = \cos^{-1}\frac{100}{\sqrt{(100)(101)}} = \boxed{5.71^\circ}$$

$$\theta_{10^6,10^6} = \cos^{-1}\frac{10^6}{\sqrt{(10^6)(10^6+1)}} = \boxed{0.0573^\circ}$$

This is consistent with the correspondence principle, which would say that the angle between $\vec{\mathbf{L}}$ and the z axis could be any value classically, which is represented by letting $\ell \to \infty$ (which also means $n \to \infty$).

73. Για κάθε μια από τις ακόλουθες ατομικές μεταβάσεις, αναφέρετε εάν η μετάβαση επιτρέπεται ή απαγορεύεται και γιατί: α) $4p \to 3p$, β) $3p \to 1s$ γ) $4d \to 3d$ δ) $4d \to 3s$ ε) $4s \to 2p$.

(*a*) The $4p \to 3p$ transition is $\boxed{\text{forbidden,}}$ because $\Delta l = 0 \neq \pm 1$.

(*b*) The $3p \to 1s$ transition is $\boxed{\text{allowed,}}$ because $\Delta l = -1$.

(*c*) The $4d \to 3d$ transition is $\boxed{\text{forbidden,}}$ because $\Delta l = 0 \neq \pm 1$.

(*d*) The $4d \to 3s$ transition is $\boxed{\text{forbidden,}}$ because $\Delta l = -2 \neq \pm 1$.

(*e*) The $4s \to 2p$ transition is $\boxed{\text{allowed,}}$ because $\Delta l = +1$.

71. α) Δείξτε ότι η μέση τιμή για το $1/r$ ενός ηλεκτρονίου στην θεμελιώδη κατάσταση του υδρογόνου είναι ίση με $1/r_0$ και από αυτό συμπεραίνουμε πως η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\overline{U} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0}.$$

β) Χρησιμοποιώντας την $E = \overline{U} + \overline{K}$, βρείτε μια σχέση μεταξύ της μέσης κινητικής ενέργειας και της μέσης δυναμικής ενέργειας στη θεμελιώδη κατάσταση. [*Υπόδειξη*: Για το α), βλ. Πρόβλ. 19 ή το Παρ. 38.9].

$$\overline{\left(\frac{1}{r}\right)} = \int_0^\infty \frac{1}{r}\left|\psi_{100}\right|^2 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{1}{\pi r_0^3} e^{-2\frac{r}{r_0}} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{r_0^2}\int_0^\infty \frac{r}{r_0} e^{-2\frac{r}{r_0}} dr \text{ ; let } x = 2\frac{r}{r_0} \rightarrow$$

$$= \frac{1}{r_0}\int_0^\infty x e^{-x} dx = \frac{1}{r_0}(1) = \frac{1}{r_0}$$

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \rightarrow \bar{U} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{1}{r}\left|\psi_{100}\right|^2 4\pi r^2 dr = \boxed{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_0}}$$

$$E = \bar{U} + \bar{K}.$$

$$E = -\frac{e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2} \;;\; \bar{U} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_0}$$

$$\bar{K} = E - \bar{U} = -\frac{e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2} - \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_0}\right) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} - \frac{e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} - \frac{e^4 m\left(\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2}\right)}{8\varepsilon_0^2 h^2 r_0}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} - \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = \boxed{-\tfrac{1}{2}\bar{U}}$$

70. Το διανυσματικό μοντέλο (Πρόβλ. 69) προσφέρει κάποια βαθύτερη κατανόηση της αρχής της απροσδιοριστίας για τη στροφορμή, η οποία είναι

$$\Delta L_Z \Delta\phi \geq \hbar$$

για τη συνιστώσα z. Εδώ το ϕ είναι η γωνιακή θέση μετρημένη στο κάθετο επίπεδο στον άξονα z. Εάν το m_ℓ για ένα άτομο είναι γνωστό, το L_z προσδιορίζεται επακριβώς, οπότε $\Delta L_z = 0$. α) Τι μας πληροφορεί αυτό για το ϕ; β) Τι μπορείτε να πείτε για τα L_x και L_y, τα οποία δεν είναι κβαντισμένα (μόνο τα L και L_z είναι); γ) Δείξτε ότι παρότι τα L_x και L_y δεν είναι κβαντισμένα, το $(L_x^2 + L_y^2)^{1/2} = [\ell(\ell+1) - m_\ell^2]^{1/2}\hbar$ είναι.

(*a*) Since $\Delta L_z = 0$, $\Delta\phi \to \infty$, and so $\boxed{\phi \text{ is unknown}}$. We can say nothing about the value of ϕ.

(*b*) Since ϕ is completely unknown, we have no knowledge of the component of the angular momentum perpendicular to the z-axis. Thus $\boxed{L_x \text{ and } L_y \text{ are unknown}}$.

(*c*) The square of the total angular momentum is given by $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Use this with the quantization conditions for L and L_z given in Eqs. 39-3 and 39-4.

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \;\rightarrow\; l(l+1)\hbar^2 = L_x^2 + L_y^2 + m_l^2\hbar^2 \;\rightarrow\; L_x^2 + L_y^2 = \left[l(l+1) - m_l^2\right]\hbar^2$$

$$\sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \boxed{\left[l(l+1) - m_l^2\right]^{1/2}\hbar}$$