

Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Ορίζουμε $i = \sqrt{-1}$ και αντίστοιχα $i^2 = -1$. Οι αριθμοί που περιέχουν το i ονομάζονται φανταστικοί.

Ένας μιγαδικός αριθμός z αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό ενός «πραγματικού» $\text{Re}(z)$ και ενός «φανταστικού» $\text{Im}(z)$ αριθμού:

$$z = x + iy$$

Όπου $x = \text{Re}(z)$ και $y = \text{Im}(z)$

Ο συζυγής μιγαδικός ορίζεται ως $z^* = x - iy$

Εάν $z = 5 - 3i$ τότε $z^* = 5 - 3(-i) = 5 + 3i$

Πρόσθεση και Αφαίρεση μιγαδικών:

Προσθέτουμε/αφαιρούμε τα πραγματικά και φανταστικά μέρη ξεχωριστά:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

if $z_1 = 2 + 3i$ and $z_2 = 1 - 4i$, then

$$z_1 - z_2 = (2 - 1) + [3 - (-4)]i = 1 + 7i$$

Πολλαπλασιασμός: Επιμεριστική ιδιότητα

$$2z_1 + 3z_2 = 2(2 + 3i) + 3(1 - 4i) = 4 + 6i + 3 - 12i = 7 - 6i$$

$$(2 - i)(-3 + 2i) = -6 + 3i + 4i - 2i^2$$

$$= -4 + 7i$$

$$\begin{aligned} zz^* &= z^*z = |z|^2 = (x - iy)(x + iy) \\ &= (x^2 + ixy + y^2 - ixy) \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Διαίρεση: Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή:

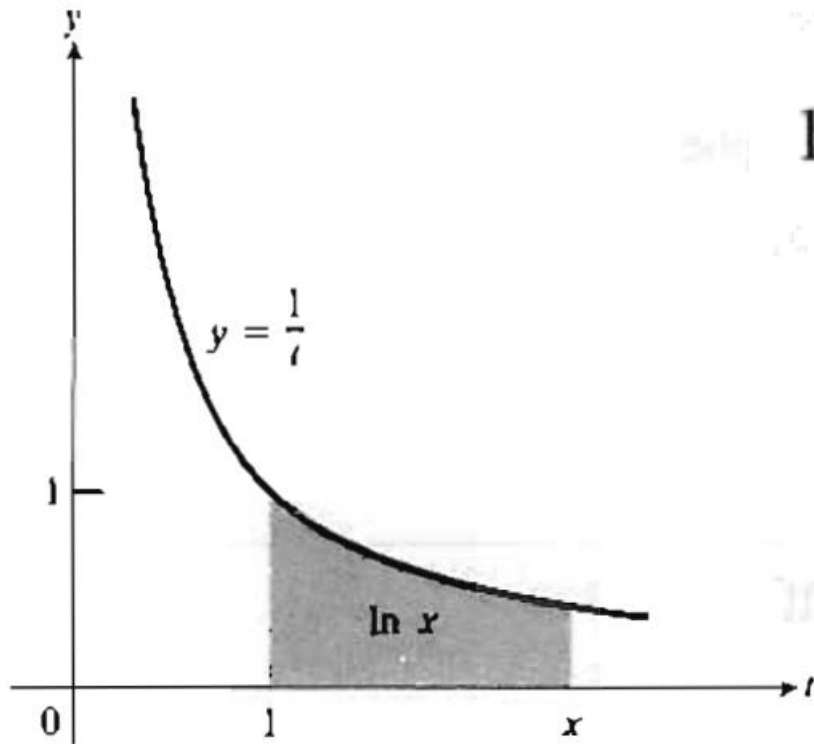
$$z = \frac{2+i}{1+2i}$$

$$z = \frac{2+i}{1+2i} \left(\frac{1-2i}{1-2i} \right) = \frac{4-3i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

Ο αντίστροφος :

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \left(\frac{x-iy}{x-iy} \right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Ο φυσικός λογάριθμος



$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0$$

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0.$$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}.$$

Βρείτε το dy/dx εάν $y = \ln(3x^2 + 4)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2 + 4} \frac{d(3x^2 + 4)}{dx}$$

$$= \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

$$u = f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{6x}{3x^2 + 4} dx$

$$f(x) = 3x^2 + 4 \text{ και } f'(x) = 6x.$$

$$\int \frac{6x}{3x^2 + 4} = \ln |3x^2 + 4| + C = \ln(3x^2 + 4) + C.$$

Ιδιότητες του φυσικού λογάριθμου

$$\ln ax = \ln a + \ln x$$

$$\ln \frac{x}{a} = \ln x - \ln a$$

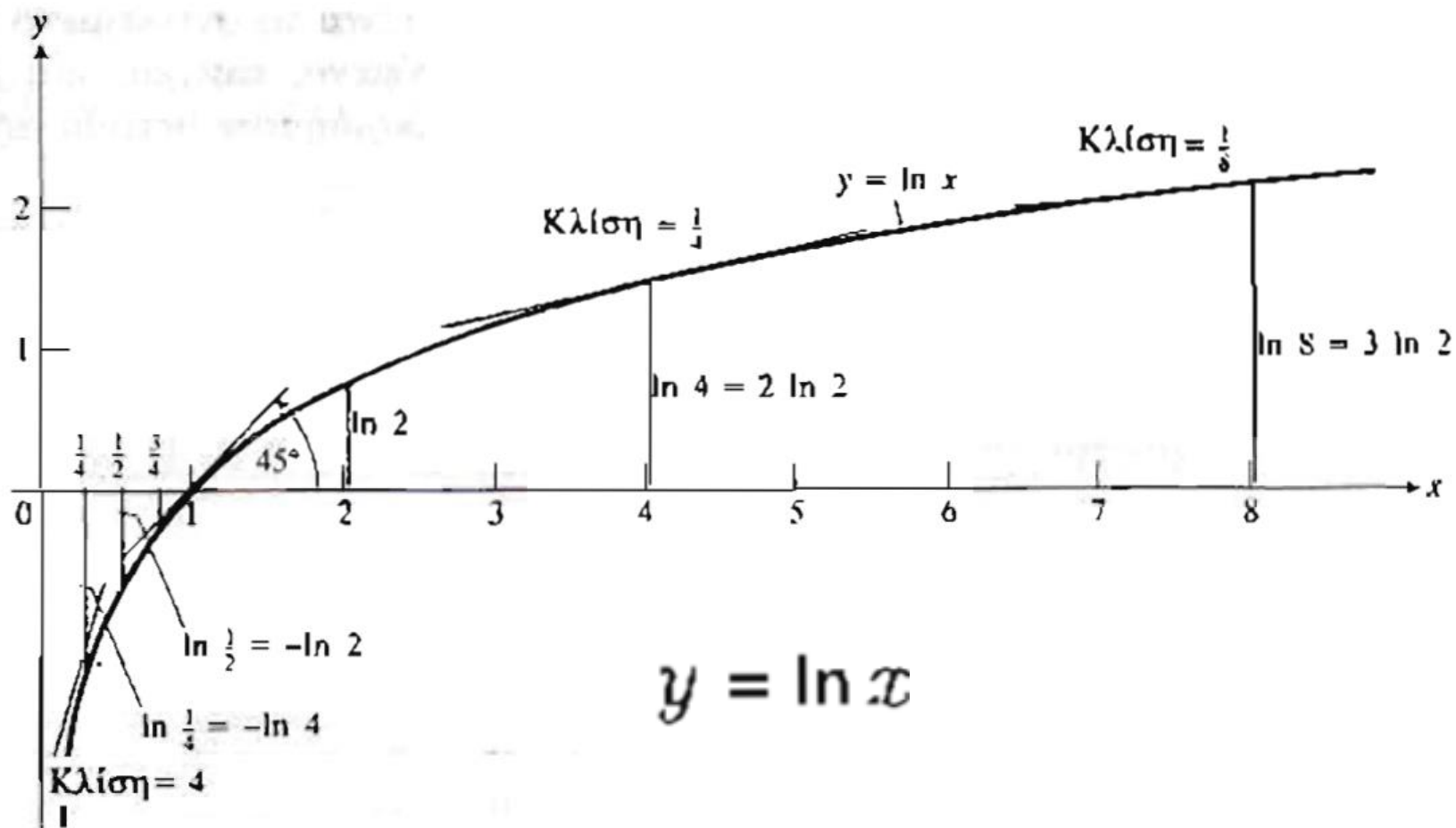
$$\ln x^n = n \ln x$$

$$\ln \left(\frac{1}{8} \right) = \ln 1 - \ln 8 = 0 - \ln 2^3 = -3 \ln 2$$

$$\ln 4 - \ln 5 = \ln \left(\frac{4}{5} \right) = \ln 0.8$$

$$\ln \sqrt[3]{25} = \ln(25)^{1/3} = \left(\frac{1}{3} \right) \ln 25 = \left(\frac{1}{3} \right) \ln 5^2 = \left(\frac{2}{3} \right) \ln 5$$

$$y = \ln x.$$



$$y = \ln x$$

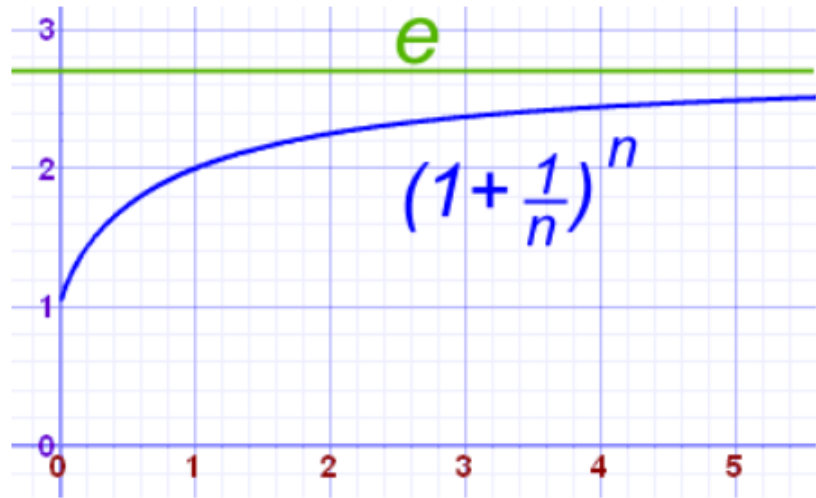
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Η εκθετική συνάρτηση e^x

Ο αριθμός του Euler e ικανοποιεί τη σχέση:

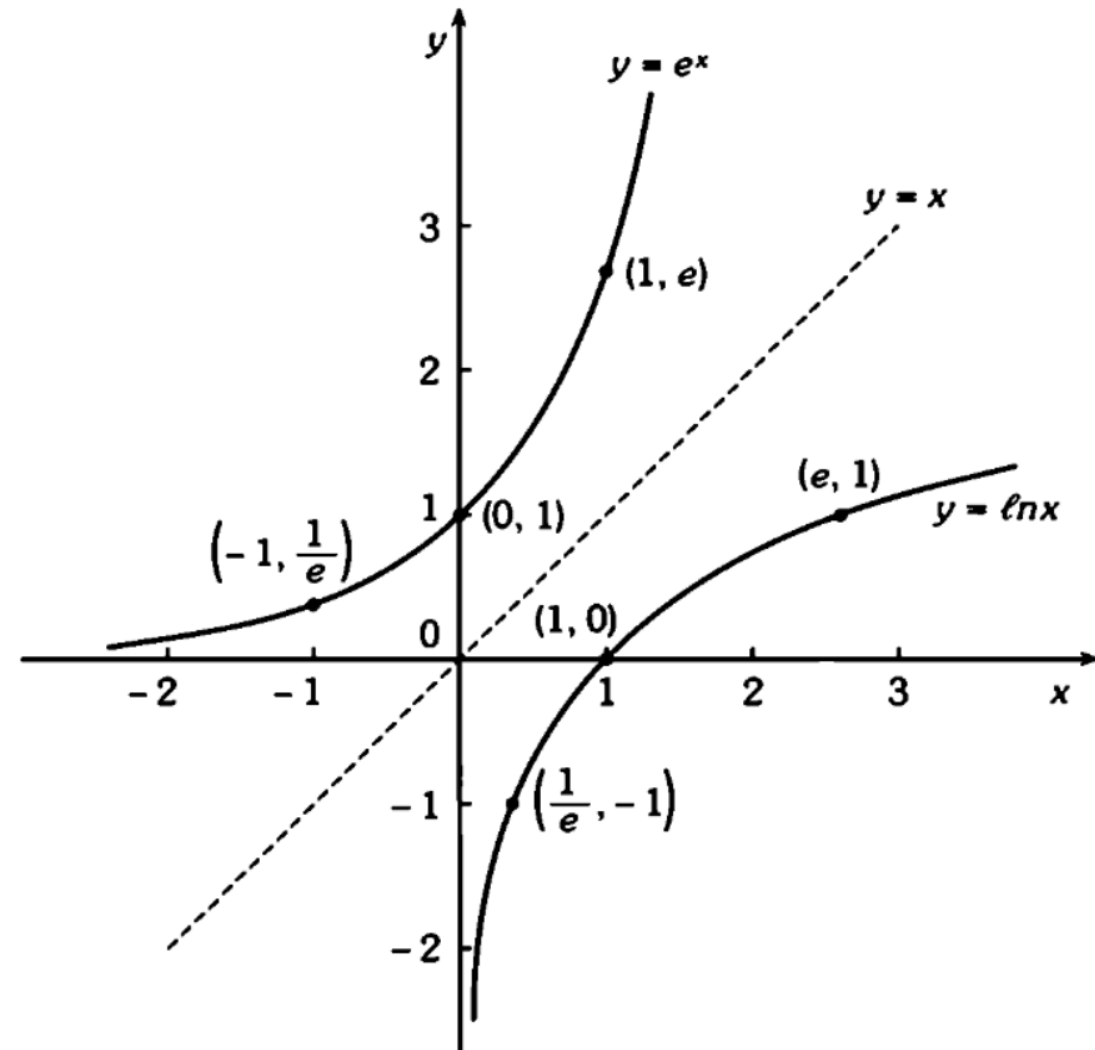
$$\ln e = 1, \quad e = 2,718281828 \dots$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$



n	$(1 + 1/n)^n$
1	2.00000
2	2.25000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1,000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827

$$x = \ln(y) \iff y = e^x$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^\infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$\text{a) } e^{\ln 2} = 2$$

$$\text{b) } e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$$

$$\text{c) } \ln e^{-1.3} = -1.3$$

$$\text{d) } \ln e^{\sin x} = \sin x$$

$$\text{e) } \ln \frac{e^{2x}}{5} = \ln e^{2x} - \ln 5 = 2x - \ln 5$$

For all numbers x , x_1 , and x_2 ,

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

3. $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$

4. $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}.$$

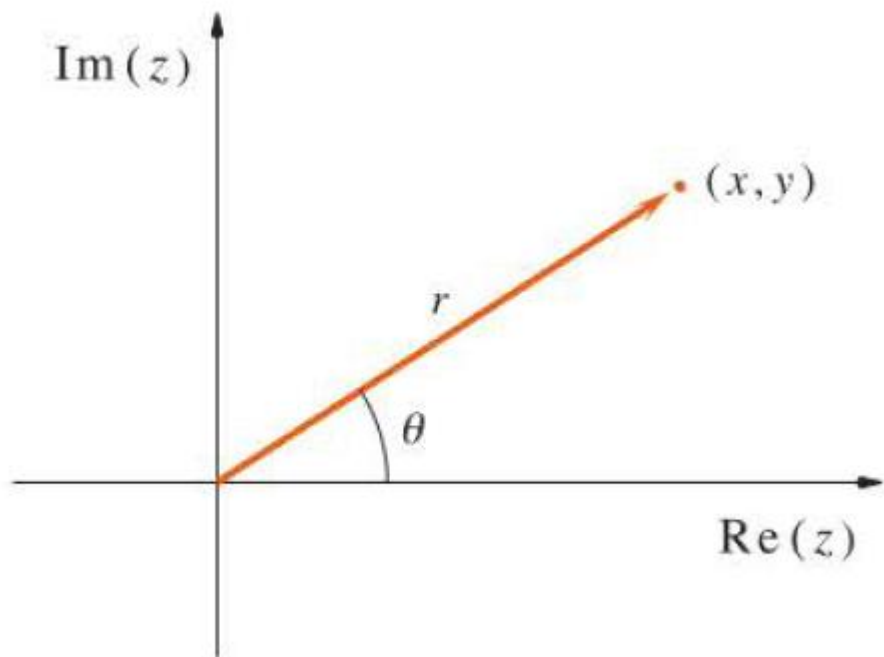
a)
$$\frac{d}{dx} e^{-x} = e^{-x} \frac{d}{dx} (-x) = e^{-x} (-1) = -e^{-x}$$

b)
$$\frac{d}{dx} e^{\sin x} = e^{\sin x} \frac{d}{dx} (\sin x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$\int e^u du = e^u + C.$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} e^{3x} dx &= \int_0^{\ln 8} e^u \cdot \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\ln 8} e^u du \\ &= \frac{1}{3} e^u \Big|_0^{\ln 8} \\ &= \frac{1}{3} [8 - 1] = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Μιγαδικοί αριθμοί ως διάνυσμα και πολικές συντεταγμένες



$$x = \text{Re}(z) = r \cdot \cos(\theta)$$

$$y = \text{Im}(z) = r \cdot \sin(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ο τύπος του Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

$$z^* = re^{-i\theta}$$

Θεώρημα de Moivre: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

If $z = x + 2iy$, then find

(a) $\operatorname{Re}(z^*)$

(b) $\operatorname{Re}(z^2)$

(c) $\operatorname{Im}(z^2)$

(d) $\operatorname{Re}(zz^*)$

(e) $\operatorname{Im}(zz^*)$

$$z^* = x - 2iy$$

(a) $\operatorname{Re}(z^*) = x$

(b) $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(x + 2iy)^2 = \operatorname{Re}(x^2 + (2iy)^2 + 2x2iy) = \operatorname{Re}(x^2 - 4y^2 + 4ixy) = x^2 - 4y^2$

(c) $\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(x + 2iy)^2 = \operatorname{Im}(x^2 + (2iy)^2 + 2x2iy) = \operatorname{Im}(x^2 - 4y^2 + 4ixy) = 4xy$

(d) $\operatorname{Re}(zz^*) = \operatorname{Re}|x + 2iy|^2 = \operatorname{Re}(x^2 + (2y)^2) = x^2 + 4y^2$

(e) $\operatorname{Im}(zz^*) = \operatorname{Im}|x + 2iy|^2 = 0$

Εκφράστε τους αριθμούς με την μορφή $re^{i\theta}$

(a) $6i$

(b) $4 - \sqrt{2}i$

(c) $-1 - 2i$

(d) $\pi + ei$

(a) $z = 0 + 6i$, $r = |z| = 6$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ so $6i = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$

(b) $z = 4 - \sqrt{2}i$, $r = |z| = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \theta = -0,11\pi$ so $4 - \sqrt{2}i = 3\sqrt{2}e^{-i0,11\pi}$

(c) $z = -1 - 2i$, $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$,

$\tan\theta = \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow \theta = 0,35\pi$ so $-1 - 2i = \sqrt{5}e^{i0,35\pi}$

(d) $z = \pi + ei$, $r = |z| = \sqrt{(\pi)^2 + (e)^2} = 4,15$,

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2,72}{3,14} = 0,71 \Rightarrow \theta = 0,23\pi$ so $\pi + ei = 4,15e^{i0,23\pi}$

Δείξτε ότι

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{και}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Δείξτε ότι

$$e^{i\pi} = -1.$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + 0 = -1$$

Για

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad \begin{cases} m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} d\phi \Phi_m(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{for all values of } m \neq 0 \\ \sqrt{2\pi} & m = 0 \end{cases}$$

και

$$\int_0^{2\pi} d\phi \Phi_m^*(\phi) \Phi_n(\phi) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Για

$m \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi (\cos(m\phi) + i \sin(m\phi)) =$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi \cos(m\phi) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi \sin(m\phi) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sin(2\pi m) - \sin(0)] - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} [-\cos(2\pi m) + \cos(0)] \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [0 - 0] - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} [-1 + 1] = 0 \end{aligned}$$

Για $m = 0$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{i0\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\phi) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2\pi - 0) = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{-im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{in\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi}$$

Με βάση την προηγούμενη απόδειξη το ολοκλήρωμα αυτό είναι
διάφορο του μηδενός **μόνο όταν $n - m = 0$ δηλ $m = n$**

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{-im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m-m)\phi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2\pi} (\phi) \Big|_0^{2\pi} = 1$$

Η ανισότητα του Schwartz λέει ότι για δύο μιγαδικούς αριθμούς

$z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ τότε ισχύει

$$(x_1x_2 + y_1y_2) \leq |z_1||z_2|$$

$$\begin{aligned} |z_1|^2|z_2|^2 &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 = \\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 = \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \end{aligned}$$

Αλλά $(x_1y_2 - y_1x_2)^2 \geq 0$ επομένως $|z_1|^2|z_2|^2 \geq (x_1x_2 + y_1y_2)^2$

$$|z_1|^2|z_2|^2 - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \geq 0$$

$$[|z_1||z_2| + (x_1x_2 + y_1y_2)][|z_1||z_2| - (x_1x_2 + y_1y_2)] \geq 0$$

Εάν $(x_1x_2 + y_1y_2) \geq |z_1||z_2|$ τότε $(x_1x_2 + y_1y_2) \geq 0$ και $|z_1||z_2| - (x_1x_2 + y_1y_2) \leq 0$ και επομένως

$$\overbrace{[|z_1||z_2| + (x_1x_2 + y_1y_2)]}^+ \overbrace{[|z_1||z_2| - (x_1x_2 + y_1y_2)]}^- \geq 0$$

Επομένως

$$(x_1x_2 + y_1y_2) \leq |z_1||z_2|$$