Δείξτε την σχέση (Sterling) $\ln N! = N \ln N - N$

$$\begin{aligned}
\ln(N!) &= \ln\left[(N)(N-1)(N-2)\ldots(2)(1)\right] \\
&= \ln(N) + \ln(N-1) + \ln(N-2) + \cdots + \ln(2) + \ln(1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) \approx \int_{1}^{N} \ln(n)\, dn \\
&= N \ln N - N - (1 \ln 1 - 1) \approx N \ln N - N
\end{aligned}$$

Using the following table

x	$p(x)$
-6	0.05
-2	0.15
0	0.50
1	0.10
3	0.05
4	0.10
5	0.05

calculate $\langle x \rangle$ and $\langle x^2 \rangle$ and show that $\sigma_x^2 > 0$.

x	p(x)	x*p(x)	x^2*p(x)	
-6	0.05	-0.3	1.8	
-2	0.15	-0.3	0.6	
0	0.5	0	0	
1	0.1	0.1	0.1	
3	0.05	0.15	0.45	
4	0.1	0.4	1.6	
5	0.05	0.25	1.25	
	Sum[p(x)]	**<x>**	**<x^2>**	**σ^2**
	1	**0.3**	**5.8**	**5.71**

2.1 (α) Αφού δεν γνωρίζουμε τη θέση ενός σωματιδίου σε ένα μονοδιάστατο κουτί (particle in a box), του αναθέτουμε μια ομοιόμορφη πιθανολογική πυκνότητα από το x=0 έως το x=L, αντιπροσωπεύοντας έτσι την άγνοιά μας. Ποια είναι η κανονικοποιημένη πυκνότητα της πιθανότητας για τη θέση (απόσταση x), το μέσο όρο της θέσης, και το κλάσμα της τυπικής απόκλισης της θέσης ως προς το μέσο όρο της θέσης;

(β) Ενα κβαντικό σωματίδιο σε κουτί μήκους L και στη κατάσταση n έχει συνάρτηση κατανομής που δίδεται από την εξίσωση $P(x)=(2/L)\sin^2(n\pi x/L)$. Υπολογίστε τις ποσότητες του τμήματος (α) για την κατανομή αυτή. Βρείτε επιπλέον το όριο καθώς το $n\to\infty$, για κάθε αποτέλεσμα.

$\boxed{2-1}$ (α) Υποθέτουμε ότι $f(x)=c$ $\quad 0\le x\le L$

(10 pts) $\quad f(x)=0$ εκτός του διαστήματος

Τότε η συνθήκη κανονικοποίησης είναι $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow$

$$\int_0^L f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^L c\,dx = cL = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{L}}$$

$$\langle x\rangle = \int_0^L x f(x)\,dx = \int_0^L \frac{x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{\langle x\rangle = \frac{L}{2}}$$

$$\langle x^2\rangle = \int_0^L x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{1}{L}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^L = \frac{L^2}{3}$$

$$\langle \delta x^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{4} = \frac{L^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\langle \delta x^2\rangle} = L\sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\frac{\sigma}{\langle x\rangle} = \frac{L/2\sqrt{3}}{L/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(β) $\langle x\rangle = \int_0^L x\,P(x)\,dx = \int_0^L \frac{2x}{L}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ * Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$\cos 2x = \frac{1-\sin^2 x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L x\left[1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L x\,dx - \frac{1}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx \overset{**}{=} \frac{L}{2} - \frac{1}{L}\left(\frac{xL}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{L} + \frac{L^2}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2\pi n x}{L}\right)\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{1}{L}\left(\cancel{\frac{L^2}{4n^2\pi^2}} - \cancel{\frac{L^2}{4n^2\pi^2}}\right) \Rightarrow \boxed{\langle x\rangle = \frac{L}{2}}$$

και $\boxed{\lim_{n\to\infty}\langle x\rangle = L/2}$

** $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin^2\frac{2\pi n x}{L}\, dx$$

$$= \frac{2}{L}\left[\frac{x^3}{6} - \left(\frac{Lx^2}{4n\pi} - \frac{L^3}{8n^3\pi^3}\right)\sin\frac{2\pi n x}{L} - \frac{L^2 x}{4\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle x^2\rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}} \quad \text{και} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\langle x^2\rangle = \frac{L^2}{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{4}} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\sigma = \frac{L}{2\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{\frac{\sigma}{\langle x\rangle} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

2.2 Η πυκνότητα της πιθανότητας για ταχύτητες (<u>μόνο το μέγεθος</u>) υ των μορίων ενός αερίου είναι ανάλογες $\upsilon^2\exp(-m\upsilon^2/2kT)$. Κανονικοποιήστε την συνάρτηση της κατανομής και βρείτε την μέσο όρο ταχύτητα.

$\boxed{2.2}$ $f(v) = A\, v^2 e^{-mv^2/2kT}$, Η συνθήκη κανονικοποίησης είναι

(5pts)

$$\int_0^\infty f(v)\,dv = 1 \Rightarrow \int_0^\infty A v^2 e^{-mv^2/2kT}\,dv = 1 \overset{*}{\Longrightarrow} \quad * \left(\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\alpha z^2} dz = 2\int_0^\infty \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}} \right)$$

$$A\left[\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{-3/2}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{A = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\langle v\rangle = \int_0^\infty v f(v)\,dv = \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 e^{-mv^2/2kT}\,dv.$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \overset{**}{=} \quad ** \int_0^\infty z^3 e^{-\alpha z^2} dz = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{1}{2(m/2kT)^2} = \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}\,\pi^{1/2}}\,\frac{(m/2kT)^2\,(m/2kT)^{-1/2}}{(m/2kT)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle v\rangle = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}}$$

2.3 Η κοινή συνάρτηση κατανομής για τις συνιστώσες της ταχύτητας x, y και z, υ_x υ_y και υ_z, για μόρια αερίων σε ισορροπία είναι ανάλογη $\exp[(-m\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2)/2kT]$. Ποια είναι η κανονικοποιημένη κοινή συνάρτηση κατανομής; Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των συνιστωσών της ταχύτητας; Ποια είναι η κανονικοποιημένη συνάρτηση κατανομής για την x-συνιστώσα της ταχύτητας;Ποιος είναι ο μέσος όρος των υ_x , υ_x και υ_x ; Ποιος είναι ο μέσος όρος των υ_x^2; Ποιος είναι ο μέσος όρος των $m\upsilon_x^2$;

$\boxed{2.3}$ $$f(v_x,v_y,v_z) = A\, e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

2

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f(v_x,v_y,v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z = 1 \Rightarrow A \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\, dv_x\, dv_y\, dv_z = 1 \Rightarrow$$

$$A\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\, dv\right]^3 = 1 \Rightarrow A\left[\frac{\pi^{1/2}}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}}\right]^3 = 1 \Rightarrow \boxed{A = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}}$$

$$f(v_x,v_y,v_z) = \underbrace{\left\{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\right\}}_{f(v_x)} \underbrace{\left\{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}\right\}}_{f(v_y)} \underbrace{\left\{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}\right\}}_{f(v_z)}$$

και επομένως $\boxed{f(v_x,v_y,v_z) = f(v_x)\, f(v_y)\, f(v_z)}$ Άρα οι v_x, v_y, v_z είναι <u>μη-συσχετισμένες</u>

∞

[illegible]

$$f(v_x) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z)\, dv_y\, dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_y^2+v_z^2)}{2kT}}\, dv_y\, dv_z$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v^2}{2kT}}\, dv\right)^2}_{\left[\frac{\pi^{1/2}}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}}\right]^2} \Longrightarrow$$

$$\boxed{f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}}$$

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x f(v_x)\, dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}\, dv_x}_{\to 0} = 0 \Longrightarrow \boxed{\langle v_x \rangle = 0}$$

και ανάλογα $\Longrightarrow$ $\boxed{\langle v_y \rangle = 0}$ $\boxed{\langle v_z \rangle = 0}$

$$\langle m v_x^2 \rangle = m \langle v_x^2 \rangle = m \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(v_x)\, dv_x = m \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}\, dv_x$$

$$= \frac{m^{3/2}}{(2\pi kT)^{1/2}} \frac{\pi^{1/2}}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}} \Longrightarrow \boxed{\langle m v_x^2 \rangle = kT}$$

2.4 Υποθέστε ότι ο πληθυσμός των φοιτητών έχει κοινή πυκνότητα της πιθανότητας *f(w,V)*, όπου *w* είναι το βάρος των φοιτητών (50 kg≤*w*≤100 kg) και *V* ο μέσος όρος της μπύρας που καταναλώνεται καθημερινώς (0 lit≤*V*≤1 lit), δίδεται από μια σταθερά *A*. (α) Ποιος είναι ο μέσος όρος του "συντελεστή μέθης" *V/w*; (β) Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του βάρους και της κατανάλωσης της μπύρας στο παράδειγμα αυτό;

$\boxed{2.4}$ $f(w,V) = A$ όταν $50\,kg \le w \le 100\,kgr$, $0\,lit \le V \le 1\,lit$ όπου $A \equiv$ σταθερά.

Τότε

$$\int_{50}^{100}\int_{0}^{1} f(w,v)\,dw\,dV = 1 \Rightarrow A\,(100-50)^{kgr}\,(1-0)^{lit} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{A = \frac{1}{50}\,(kgr \cdot lit)^{-1}}$$

(α)

$$\left\langle \frac{V}{w} \right\rangle = \int_{50}^{100}\int_{0}^{1} \frac{V}{w} f(w,v)\,dw\,dV = A \int_{50}^{100} \frac{dw}{w} \int_{0}^{1} V\,dV$$

$$= A \ln w \Big|_{50}^{100} \left(\frac{V^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{50} \ln\left(\frac{100}{50}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{kgr\,lit}\, lit^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\left\langle \frac{V}{w} \right\rangle = \frac{\ln 2}{100}\,\frac{lit}{kgr}} \quad (6.9\ mlit/kgr)$$

(α)

$$\left\langle \frac{V}{w} \right\rangle = \int_{50}^{100} \int_{0}^{1} \frac{V}{w} f(w,V)\, dw\, dV = A \int_{50}^{100} \frac{dw}{w} \int_{0}^{1} V\, dV$$

$$= A \ln w \Big|_{50}^{100} \left(\frac{V^2}{2} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{50} \ln\left(\frac{100}{50} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{kgr\,\cancel{lit}} \cdot lit^{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left\langle \frac{V}{w} \right\rangle = \frac{\ln 2}{100}\ \frac{lit}{kgr}} \quad (6.9\ mlit/kgr)$$

(β) Το βάρος και η κατανάλωση είναι μη-συσχετισμένες ποσότητες, γιατί $f(w,V) = f(w)\, f(V)$

2.6 Η σχέση μεταξύ των κυλινδρικών συντεταγμένων και των Καρτεσιανών είναι x=rcosθ, y=rsinθ, και z=z. Προσδιορίστε την τρισδιάστατη Jacobian για να βρείτε το στοιχείο του όγκου (dxdydz) σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

2.6

(5pts)

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow dx\,dy\,dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\,dr\,d\theta\,dz \Rightarrow$$

$$dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} dr\,d\theta\,d\phi = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dr\,d\theta\,dz$$

$$= \left(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\right) dr\,d\theta\,dz \Rightarrow$$

$$\boxed{dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

2.7 Η συνάρτηση της κατανομής ταχυτήτων για τα μόρια αερίου μιας συγκεκριμένης μοριακής δέσμης είναι η ακόλουθη : $f(u)=a$ για $u \le u_0$, $f(u)=2a$ για $u_0 < u \le 2u_0$, και $f(u)=0$ όταν $u > 2u_0$. Βρείτε την μέσο όρο ταχύτητα και την πιο πιθανή ταχύτητα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι η ταχύτητα ενός μορίου να έχει τιμή μεταξύ του 0 και u_0;

$\boxed{2.7}$ (4)

$$f(v) = \begin{cases} \alpha & 0 \le v \le v_0 \\ 2\alpha & v_0 \le v \le 2v_0 \\ 0 & 2v_0 < v \end{cases}$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{2v_0} v f(v)\, dv = \int_0^{v_0} v f(v) dv + \int_{v_0}^{2v_0} v f(v) dv =$$

$$= \alpha \int_0^{v_0} v\, dv + 2\alpha \int_{v_0}^{2v_0} v\, dv = \alpha \frac{v_0^2}{2} + \cancel{2}\alpha \left. \frac{v^2}{\cancel{2}} \right|_{v_0}^{2v_0} =$$

$$= \alpha \left(\frac{v_0^2}{2} + 4v_0^2 - v_0^2 \right) \Rightarrow \boxed{\langle v \rangle = \frac{7}{2} \alpha v_0^2}$$ (1)

Αλλά από τη συνθήκη κανονικοποίησης έχουμε

$$\int_0^{2v_0} f(v)\,dv = 1 \Rightarrow \int_0^{v_0} f(v)\,dv + \int_{v_0}^{2v_0} f(v)\,dv = 1 \Rightarrow \alpha v_0 + 2\alpha(2v_0 - v_0) = 1 \Rightarrow$$

$$3\alpha v_0 = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{3v_0}}$$

και επομένως η (1) $\Rightarrow$ $\boxed{\langle v \rangle = \frac{7}{6} v_0}$

Η πιο πιθανή ταχύτητα αντιστοιχεί σε όλες τις ταχύτητες μεταξύ των τιμών v_0 και $2v_0$.

Η πιθανότητα ενός μορίου να έχει ταχύτητα μεταξύ 0 και v_0 είναι

$$P(v) = \int_0^{v_0} f(v)\,dv = \alpha \int_0^{v_0} dv = \alpha v_0 \Rightarrow \boxed{P(v) = \frac{1}{3}}$$

2.11 $P_i(E_i) = \dfrac{e^{-\beta E_i}}{Q}, \quad Q = \sum_i e^{-\beta E_i}$. Υποθέστε ότι σε όλες τις ενέργειες προσθέτουμε τη τιμή E_0.

(α) Υπολογίστε τη νέα Q (απλοποιήστε την εξίσωση όσο το δυνατόν περισσότερο).

(β) Υπολογίστε τη νέα $P_i(E_i)$. Εχει αλλάξει;

$\boxed{2\text{-}11}$ (5p+5)

(α) $$Q' = \sum_{i=1}^{N} e^{-\beta(E_i+E_0)} = e^{-\beta E_0}\sum_{i=1}^{N} e^{-\beta E_i} = Q\,e^{-\beta E_0}$$

(β)
$$P_i(E_i+E_0) = \frac{e^{-\beta(E_i+E_0)}}{Q'} = \frac{e^{-\beta E_i}}{Q}\,\frac{e^{-\beta E_0}}{\cancel{e^{-\beta E_0}}} = P_i(E_i)$$

Η πιθανότητα παραμένει αμετάβλητη

2.12 Δίδεται η σχέση $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $-1 < x < 1$.

(α) Υπολογίστε την συνάρτηση $f(E_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right)$, όπου $\frac{E_0}{kT}$ είναι μια σταθερά.

(β) Υπολογίστε τη παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial E_0}$, παραγωποιώντας πρώτα τη συνάρτηση άμεσα, και παραγοποιώντας το αποτέλεσμα της (α), έτσι ώστε να βρείτε μια άλλη έκφραση για τον όρο $\sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right)$.

$\boxed{2-12}$ (5pt+5)

(α) $f(E_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right]^n = \frac{1}{1-\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)}$

(β) $\frac{\partial f(E_0)}{\partial E_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial E_0} \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n}{kT} \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right) \Rightarrow$

$\frac{\partial f(E_0)}{\partial E_0} = -\frac{1}{kT} \sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right)$

(α) $\Rightarrow$

$\frac{\partial f(E_0)}{\partial E_0} = \frac{d}{dE_0}\left(1-\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right)^{-1} = \frac{\left(-1/kT\right)\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)}{\left[1-\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right]^2}$

και επομένως

$\sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right) = \frac{\exp\left(-E_0/kT\right)}{\left[1-\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right]^2}$