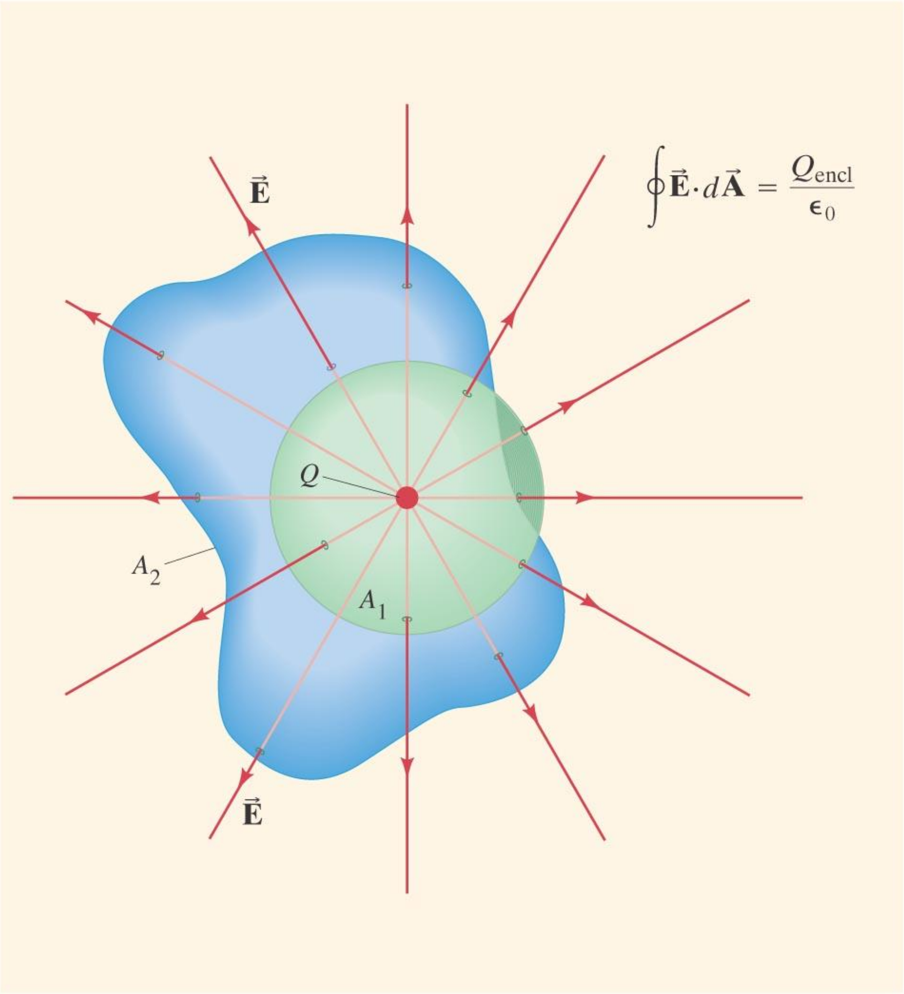
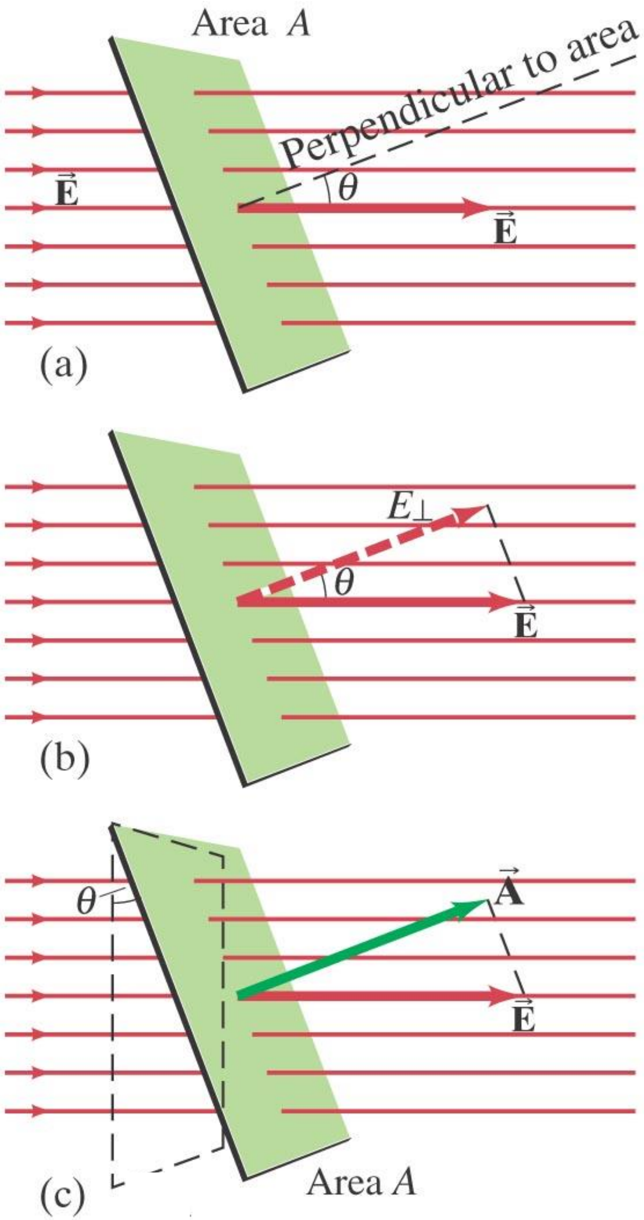
Κεφάλαιο 22
Νόμος του Gauss



Περιεχόμενα Κεφαλαίου 22

- Ηλεκτρική Ροή
- Ο Νόμος του Gauss
- Εφαρμογές του Νόμου του Gauss
- Πειραματικές επιβεβαιώσεις για τους Νόμους των Gauss και Coulomb

22-1 Ηλεκτρική Ροή



Ηλεκτρική Ροή:

$$\Phi_E = E_\perp A = EA_\perp = EA\cos\theta, \qquad [\vec{\mathbf{E}} \text{ uniform}]$$

$$\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}}. \qquad [\vec{\mathbf{E}} \text{ uniform}]$$

Η Ηλεκτρική Ροή είναι ανάλογη με τον αριθμό των ηλεκτρικών γραμμών που διέρχονται μέσα από μια επιφάνεια.

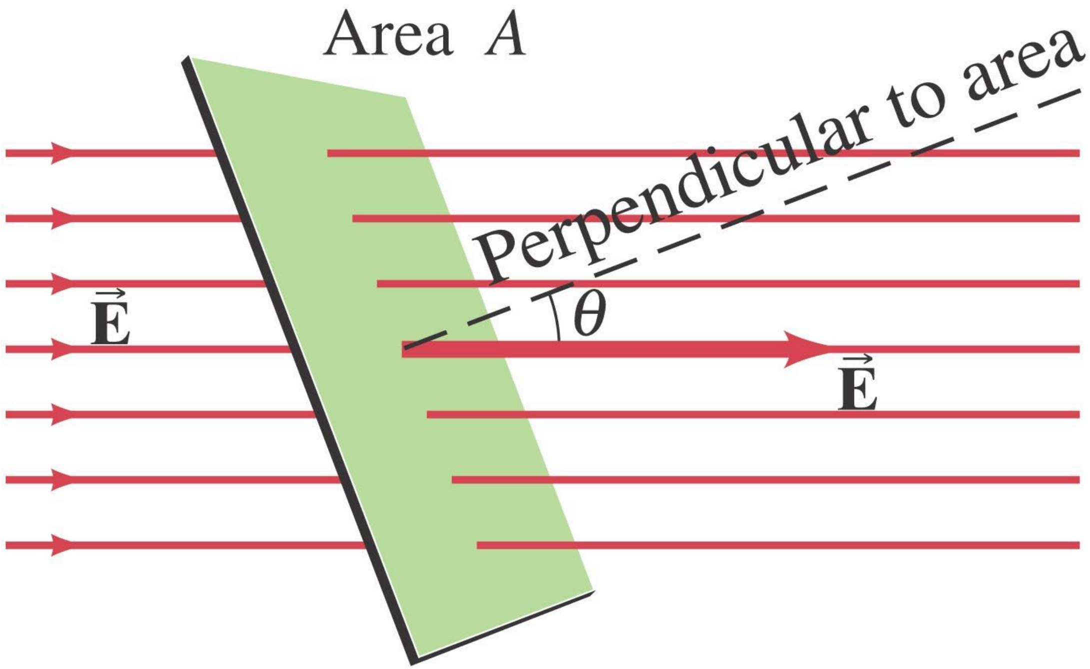
22-1 Ηλεκτρική Ροή

Βρείτε την ηλεκτρική ροή μέσα από ένα παραλληλόγραμμο διαστάσεων 10 cm επί 20 cm. Το πεδίο είναι ομογενές με ένταση 200 N/C, και η γωνία θ είναι 30°.

APPROACH We use the definition of flux, $\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = EA\cos\theta$.

SOLUTION The electric flux is

$$\Phi_E = (200\,\mathrm{N/C})(0.10\,\mathrm{m} \times 0.20\,\mathrm{m})\cos 30^\circ = 3.5\,\mathrm{N\cdot m^2/C}.$$

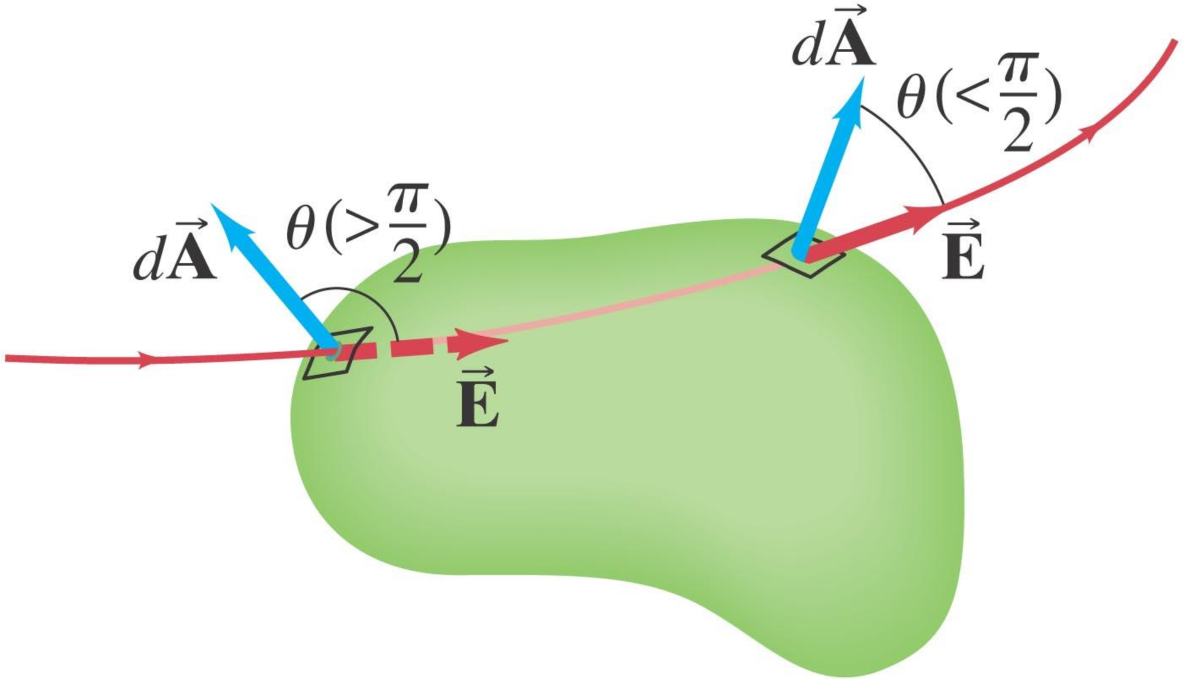


22-1 Ηλεκτρική Ροή

Η ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι:

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i\,.$$

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$



22-2 Ο Νόμος του Gauss

Ο Νόμος του Gauss: Ο συνολικός αριθμός των ηλεκτρικών γραμμών που περνούν από μια επιφάνεια (*ηλεκτρική ροή*) είναι ανάλογη με το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που είναι εγκλωβισμένο στο <u>ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ</u> της επιφάνειας:

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}.$$

Για περιπτώσεις με υψηλή συμμετρία ο νόμος αυτός μας διευκολύνει στην εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου.

22-2 Ο Νόμος του Gauss

Για σημειακό φορτίο,

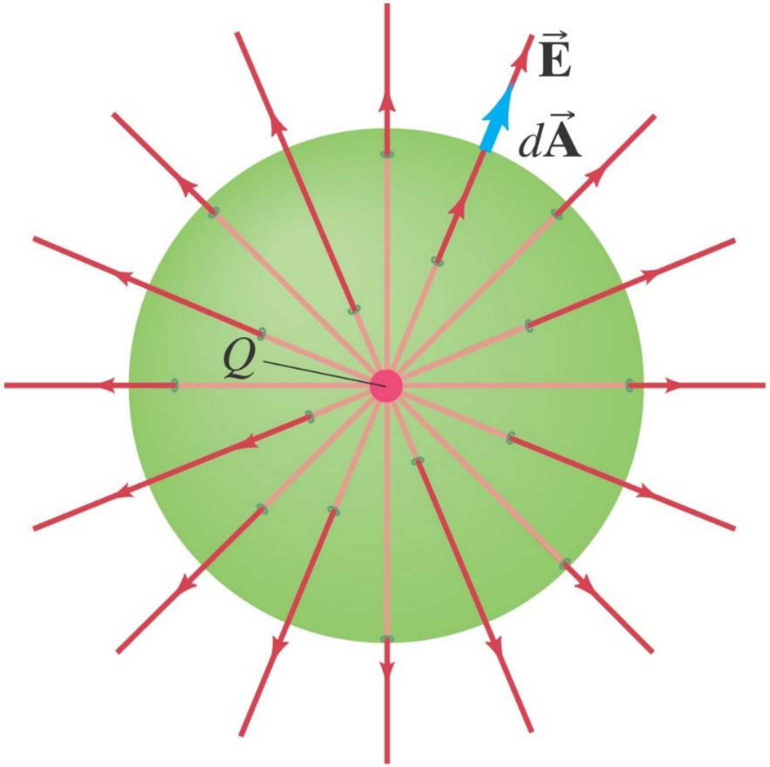
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint E\, dA = E \oint dA = E(4\pi r^2).$$

Επομένως

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2).$$

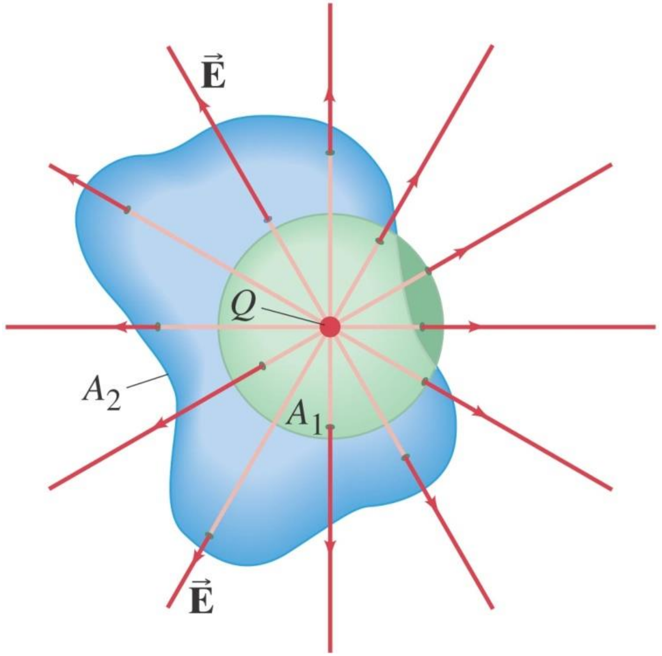
Εάν λύσουμε E βρίσκουμε το νόμο του:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



22-2 Ο Νόμος του Gauss

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Coulomb υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα του πεδίου ενός σημειακού φορτίου για επιφάνεια A_1 που περικλείει το φορτίο :



$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια A_2, που περικλείει το φορτίο, η ροή είναι ίδια με αυτήν της A_1. και επομένως το αποτέλεσμα είναι γενικό.

22-2 Ο Νόμος του Gauss

Για πολλά σημειακά φορτία επεκτείνουμε το αποτέλεσμα και βρίσκουμε :

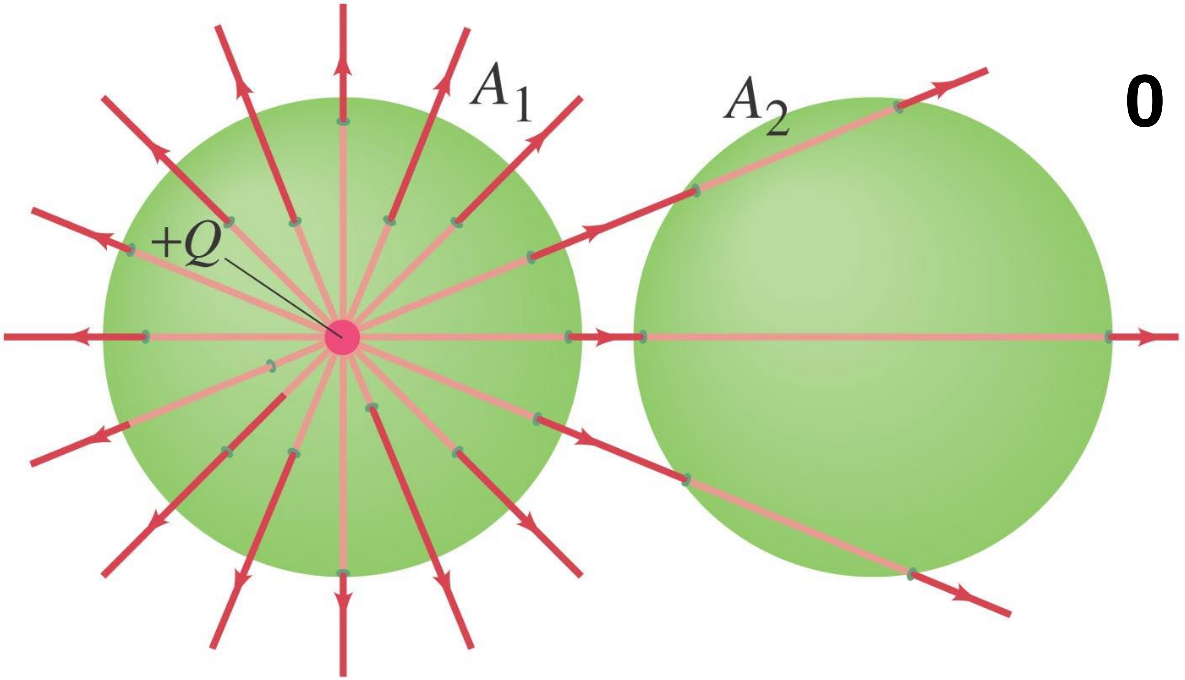
$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \oint \left(\Sigma \vec{\mathbf{E}}_i\right) \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \Sigma \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}.$$

Επομένως ο Νόμος του Gauss ισχύει για οποιαδήποτε κατανομή φορτίου. ΠΡΟΣΟΧΗ, απευθυνόμαστε πάντα στο πεδίο που δημιουργούν τα φορτία που βρίσκονται στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ της ΚΛΕΙΣΤΗΣ επιφάνειας. ***Φορτία ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ της κλειστής επιφάνειας επίσης θα συνεισφέρουν στο ΣΥΝΟΛΙΚΟ πεδίο.***

22-2 Ο Νόμος του Gauss

Θεωρείστε δύο επιφάνειας Gauss, A_1 και A_2, του σχήματος. Το μοναδικό φορτίο είναι το Q στο κέντρο της επιφάνειας A_1. Ποια είναι η συνολική ροή μέσα από τις δύο επιφάνειες;

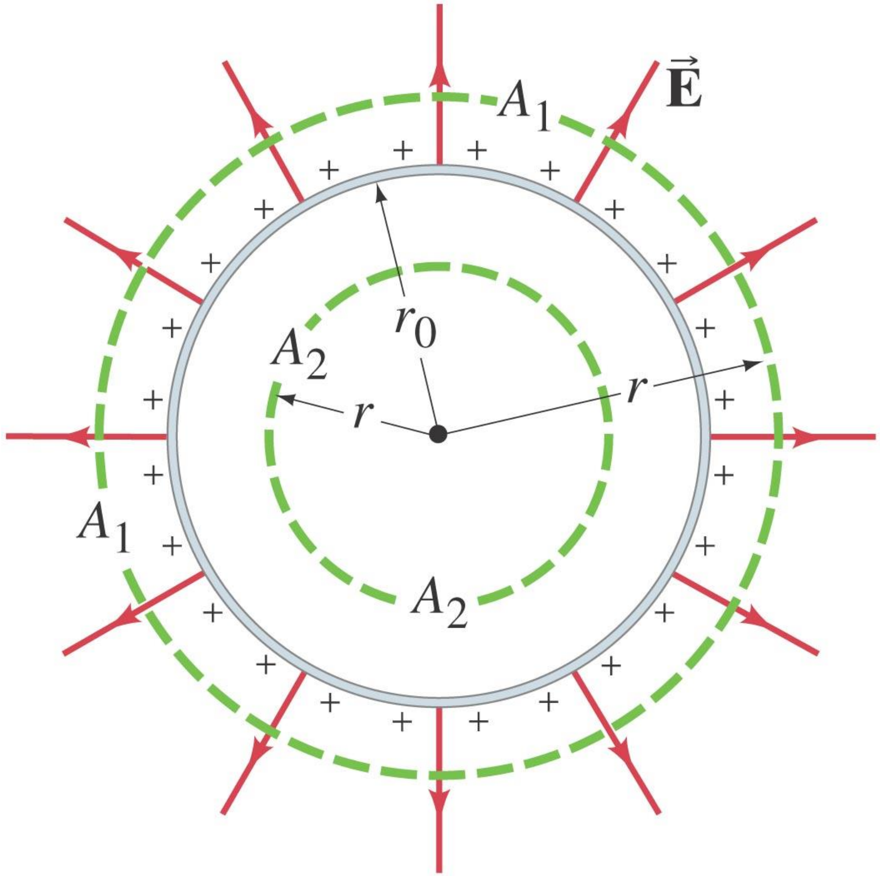
Q/ε_0

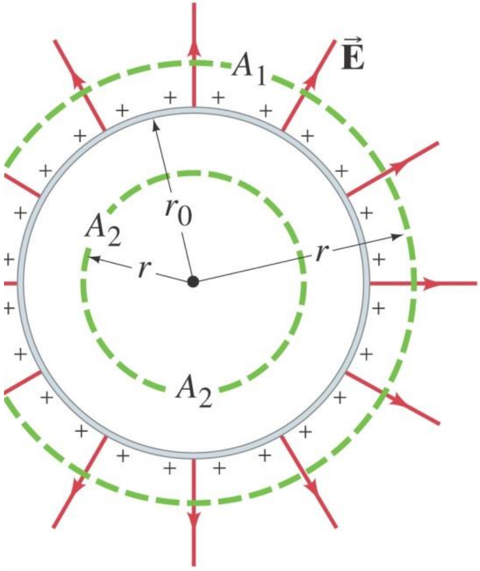


0

22-3 Εφαρμογές του Νόμου του Gauss

Ένας λεπτός σφαιρικός φλοιός με ακτίνα r_0 έχει συνολικό φορτίο Q κατανεμημένο ομοιόμορφα. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία (α) εκτός του φλοιού, (β) εντός του φλοιού (γ) τι θα συνέβαινε εάν ο φλοιός ήταν μεταλλικός





APPROACH Because the charge is distributed symmetrically, the electric field must also be symmetric. Thus the field outside the sphere must be directed radially outward (inward if $Q < 0$) and must depend only on r, not on angle (spherical coordinates).

SOLUTION (*a*) The electric field will have the same magnitude at all points on an imaginary gaussian surface, if we choose that surface as a sphere of radius r $(r > r_0)$ concentric with the shell, and shown in Fig. 22–11 as the dashed circle A_1. Because $\vec{\mathbf{E}}$ is perpendicular to this surface, the cosine of the angle between $\vec{\mathbf{E}}$ and $d\vec{\mathbf{A}}$ is always 1. Gauss's law then gives (with $Q_{\text{encl}} = Q$ in Eq. 22–4)

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

where $4\pi r^2$ is the surface area of our sphere (gaussian surface) of radius r. Thus

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}. \qquad [r > r_0]$$

Thus the field outside a uniformly charged spherical shell is the same as if all the charge were concentrated at the center as a point charge.

(*b*) Inside the shell, the electric field must also be symmetric. So E must again have the same value at all points on a spherical gaussian surface (A_2 in Fig. 22–11) concentric with the shell. Thus E can be factored out of the integral and, with $Q_{\text{encl}} = 0$ because the charge enclosed within the sphere A_2 is zero, we have

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2) = 0.$$

Hence

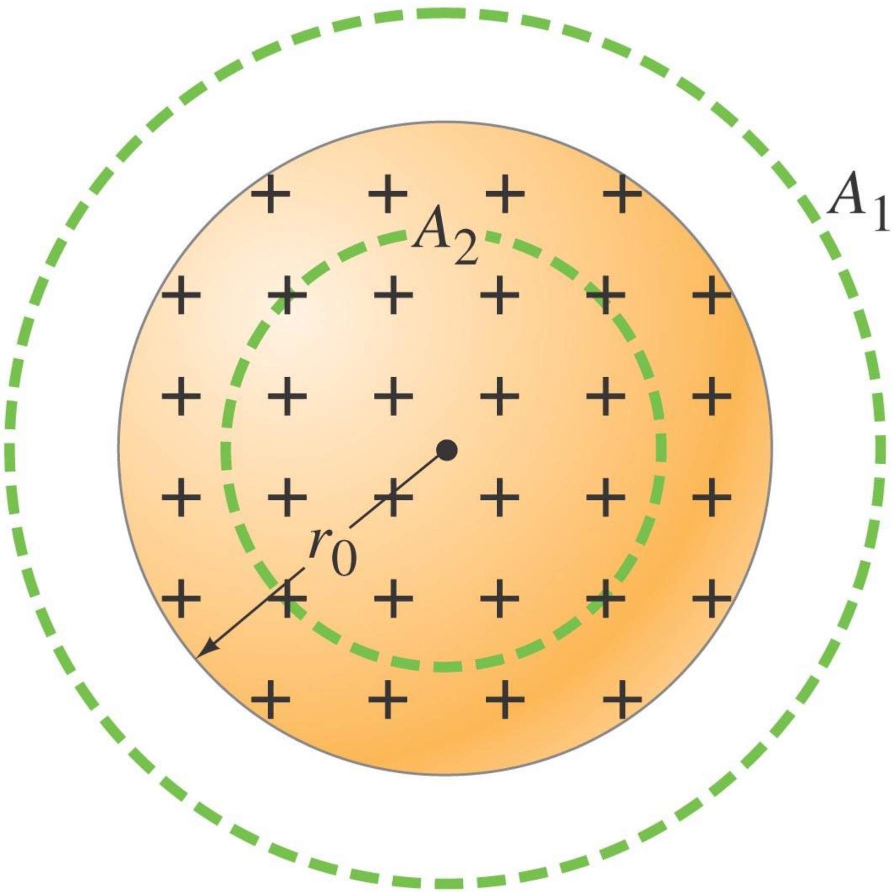
$$E = 0 \qquad [r < r_0]$$

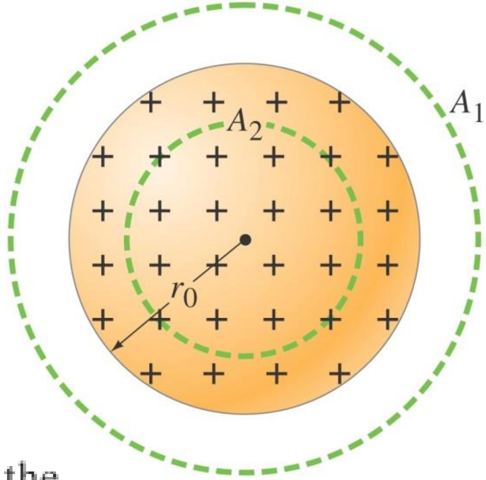
inside a uniform spherical shell of charge.

(*c*) These same results also apply to a uniformly charged solid spherical conductor, since all the charge would lie in a thin layer at the surface.

22-3 Εφαρμογές του Νόμου του Gauss

Ηλεκτρικό φορτίο Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε διηλεκτρική σφαίρα (μονωτής) με ακτίνα r_0. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο (α) εκτός της σφαίρας ($r > r_0$) και (β) εντός της σφαίρας ($r < r_0$).





APPROACH Since the charge is distributed symmetrically in the sphere, the electric field at all points must again be symmetric. $\vec{\mathbf{E}}$ depends only on r and is directed radially outward (or inward if $Q < 0$).

SOLUTION (*a*) For our gaussian surface we choose a sphere of radius r $(r > r_0)$, labeled A_1 in Fig. 22–12. Since E depends only on r, Gauss's law gives, with $Q_{\text{encl}} = Q$,

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

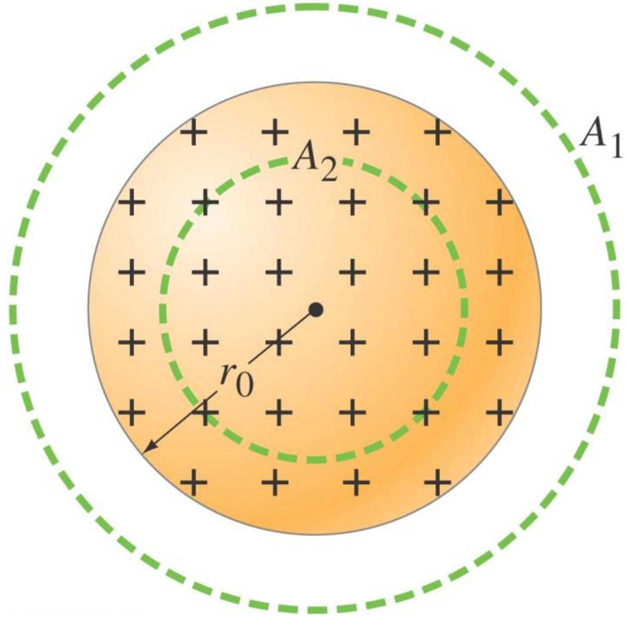
or

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Again, the field outside a spherically symmetric distribution of charge is the same as that for a point charge of the same magnitude located at the center of the sphere.

(*b*) Inside the sphere, we choose for our gaussian surface a concentric sphere of radius r $(r < r_0)$, labeled A_2 in Fig. 22–12. From symmetry, the magnitude of $\vec{\mathbf{E}}$ is the same at all points on A_2, and $\vec{\mathbf{E}}$ is perpendicular to the surface, so

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(4\pi r^2).$$



We must equate this to $Q_{\text{encl}}/\epsilon_0$ where Q_{encl} is the charge enclosed by A_2. Q_{encl} is not the total charge Q but only a portion of it. We define the **charge density**, ρ_E, as the charge per unit volume $(\rho_E = dQ/dV)$, and here we are given that $\rho_E =$ constant. So the charge enclosed by the gaussian surface A_2, a sphere of radius r, is

$$Q_{\text{encl}} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_E}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_E}\right) Q = \frac{r^3}{r_0^3} Q.$$

Hence, from Gauss's law,

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} = \frac{r^3}{r_0^3}\frac{Q}{\epsilon_0}$$

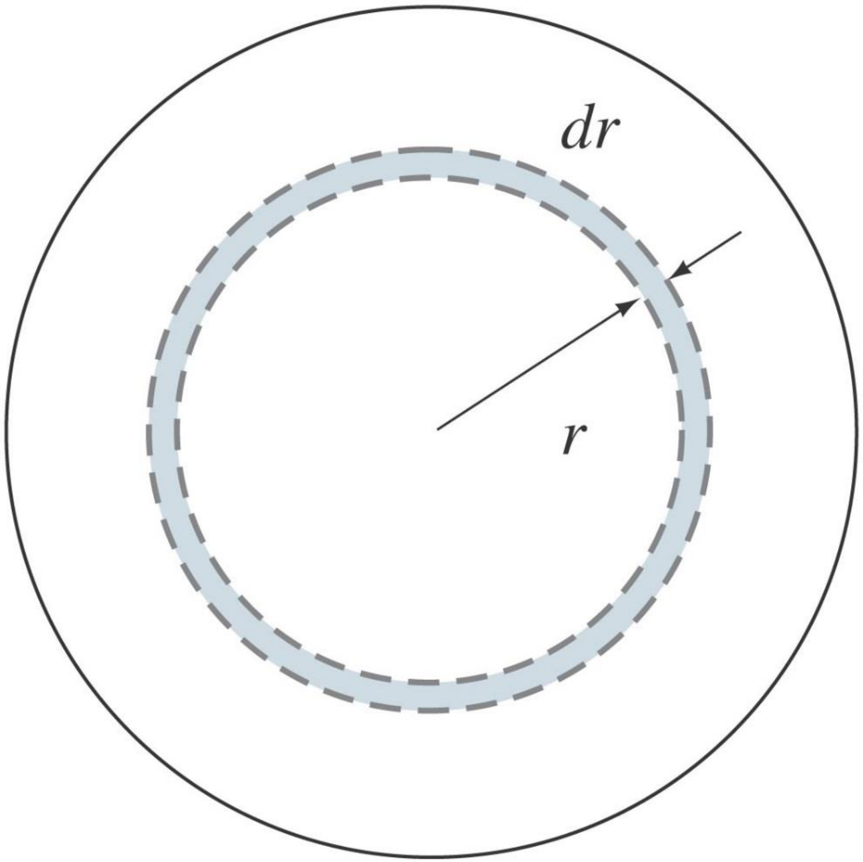
or

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_0^3} r. \qquad [r < r_0]$$

Thus the field increases linearly with r, until $r = r_0$. It then decreases as $1/r^2$, as plotted in Fig. 22–13.

22-3 Εφαρμογές του Νόμου του Gauss

Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του φορτίου μιας συμπαγούς σφαίρας είναι $\rho_E = \alpha r^2$, όπου α είναι μια σταθερά. (α) Βρείτε το α σαν συνάρτηση του φορτίου Q στην επιφάνεια της σφαίρας και της ακτίνας r_0. (β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο εντός της σφαίρας σαν συνάρτηση του r.



APPROACH We divide the sphere up into concentric thin shells of thickness dr as shown in Fig. 22–14, and integrate (*a*) setting $Q = \int \rho_E \, dV$ and (*b*) using Gauss's law.

SOLUTION (*a*) A thin shell of radius r and thickness dr (Fig. 22–14) has volume $dV = 4\pi r^2 \, dr$. The total charge is given by

$$Q = \int \rho_E \, dV = \int_0^{r_0} (\alpha r^2)(4\pi r^2 \, dr) = 4\pi\alpha \int_0^{r_0} r^4 \, dr = \frac{4\pi\alpha}{5} r_0^5 .$$

Thus $\alpha = 5Q/4\pi r_0^5$.

(*b*) To find E inside the sphere at distance r from its center, we apply Gauss's law to an imaginary sphere of radius r which will enclose a charge

$$Q_{\text{encl}} = \int_0^r \rho_E \, dV = \int_0^r (\alpha r^2) \, 4\pi r^2 \, dr = \int_0^r \left(\frac{5Q}{4\pi r_0^5} r^2 \right) 4\pi r^2 \, dr = Q \frac{r^5}{r_0^5} .$$

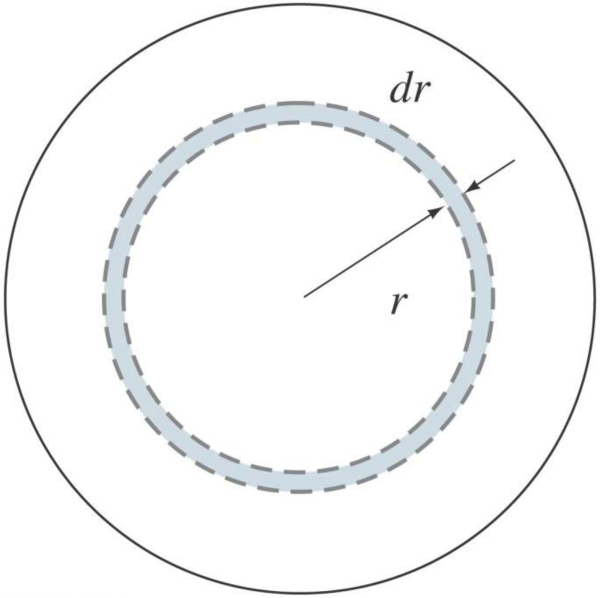
By symmetry, E will be the same at all points on the surface of a sphere of radius r, so Gauss's law gives

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}$$

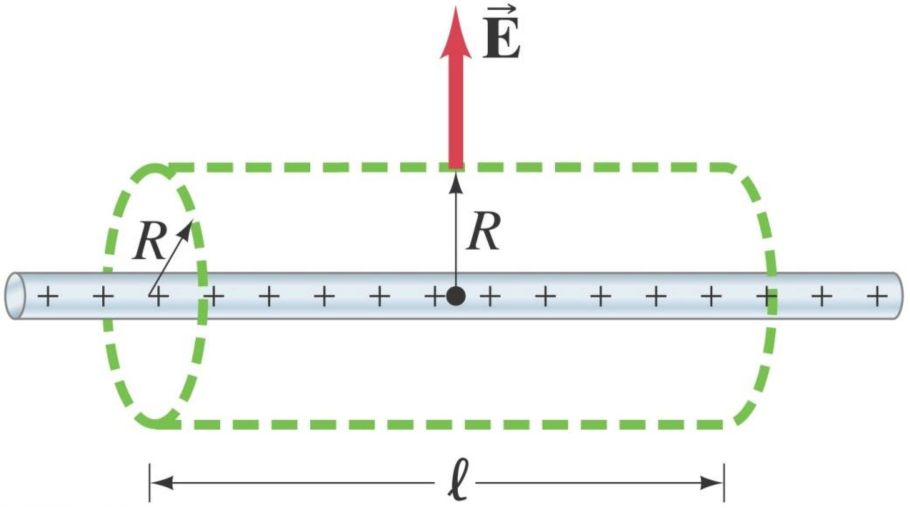
$$(E)(4\pi r^2) = Q \frac{r^5}{\epsilon_0 r_0^5} ,$$

so

$$E = \frac{Q r^3}{4\pi\epsilon_0 r_0^5} .$$



Ένα πολύ μακρύ καλώδιο έχει ομοιόμορφο θετικό φορτίο ανά μονάδα μήκους, λ. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο πλησίον του καλωδίου (αλλά εκτός αυτού) και μακριά από τα άκρα.



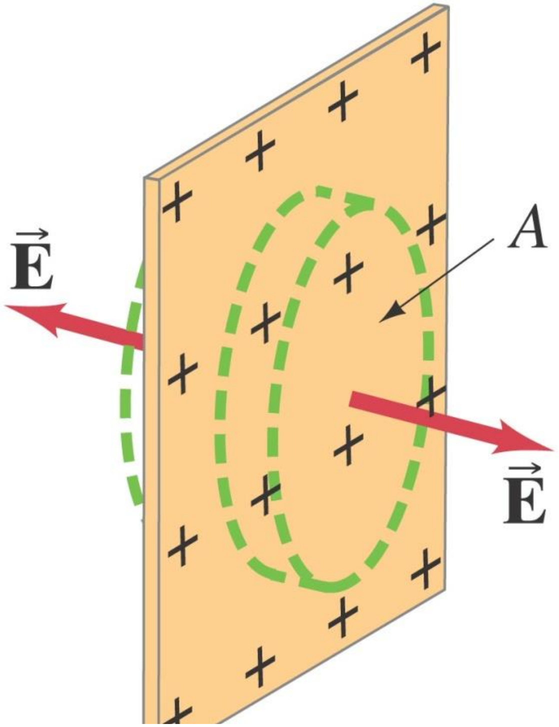
SOLUTION For our chosen gaussian surface Gauss's law gives

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = E(2\pi R\ell) = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0},$$

where ℓ is the length of our chosen gaussian surface ($\ell \ll$ length of wire), and $2\pi R$ is its circumference. Hence

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}.$$

Η ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου για μια μεγάλη λεπτή επίπεδη διηλεκτρική επιφάνεια είναι σ (σ = φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας = dQ/dA). Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια.



SOLUTION Since no flux passes through the curved sides of our chosen cylindrical surface, all the flux is through the two end caps. So Gauss's law gives

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 2EA = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

where $Q_{\text{encl}} = \sigma A$ is the charge enclosed by our gaussian cylinder. The electric field is then

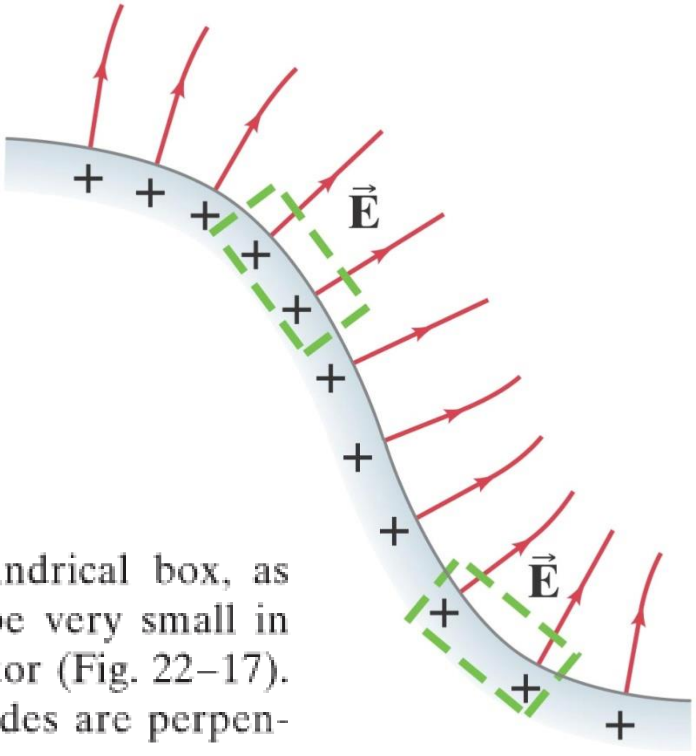
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

NOTE This is the same result we obtained much more laboriously in Chapter 21, Eq. 21–7. The field is uniform for points far from the ends of the plane, and close to its surface.

Δείξτε ότι το πεδίο μόλις στο εξωτερικό της επιφάνειας ενός αγωγού είναι

$$E = \sigma/\varepsilon_0$$

Όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου το αγωγού σε οποιοδήποτε σημείο.



APPROACH We choose as our gaussian surface a small cylindrical box, as we did in the previous Example. We choose the cylinder to be very small in height, so that one of its circular ends is just above the conductor (Fig. 22–17). The other end is just below the conductor's surface, and the sides are perpendicular to it.

SOLUTION The electric field is zero inside a conductor and is perpendicular to the surface just outside it (Section 21–9), so electric flux passes only through the outside end of our cylindrical box; no flux passes through the short sides or inside end. We choose the area A (of the flat cylinder end) small enough so that E is essentially uniform over it. Then Gauss's law gives

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = EA = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

so that

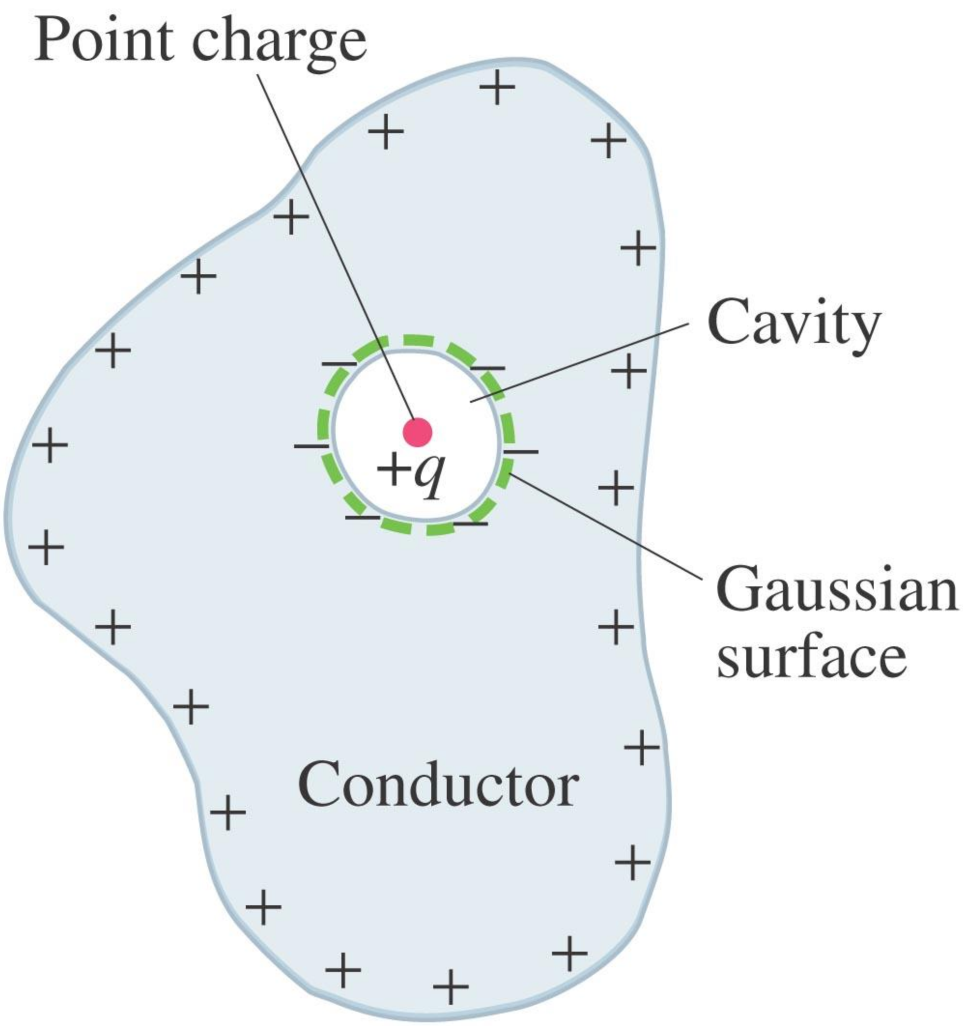
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \qquad \text{[at surface of conductor]} \qquad \textbf{(22–5)}$$

NOTE This useful result applies for a conductor of any shape.

Η διαφορά μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου πλησίον αλλά έξω από μια φορτισμένη αγώγιμη επιφάνεια και μιας φορτισμένης επιφάνειας ενός μονωτή έχει δύο όψεις:

1. **Αφού το πεδίο εντός του αγωγού είναι ΜΗΔΕΝ, όλη η ηλεκτρική ροή περνάει από την μια πλευρά.**
2. **Η επιφάνεια του μονωτή έχει πυκνότητα σ, ενώ αυτή του αγωγού σ για κάθε πλευρά της επιφάνειας και επομένως διπλάσια πυκνότητα.**

Υποθέτουμε ότι ένας αγωγός φέρει φορτίο $+Q$ και έχει μια κοιλότητα στο εσωτερικό του που περιέχει ένα φορτίο $+q$. Σχολιάστε τις κατανομές των φορτίων στις εσωτερικές και εξωτερικές επιφάνειας του αγωγού.



22-4 Πειραματική επιβεβαίωση των νόμων Gauss και Coulomb

Σε αυτό το πείραμα ο νόμος του, Gauss's προβλέπει ότι ΟΛΟ το φορτίο της σφαίρας περνάει στον κύλινδρο μόλις έρθουν σε επαφή.