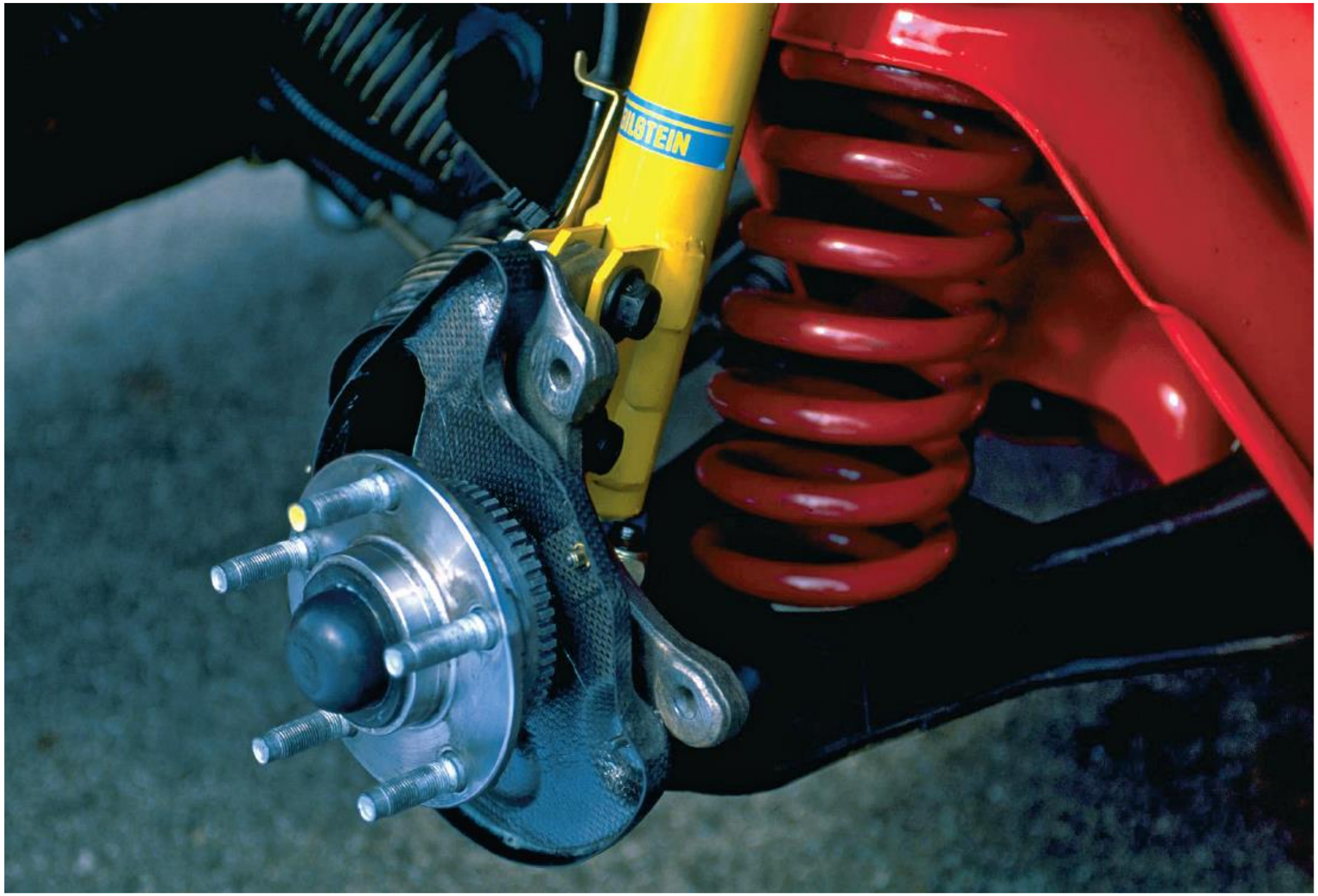
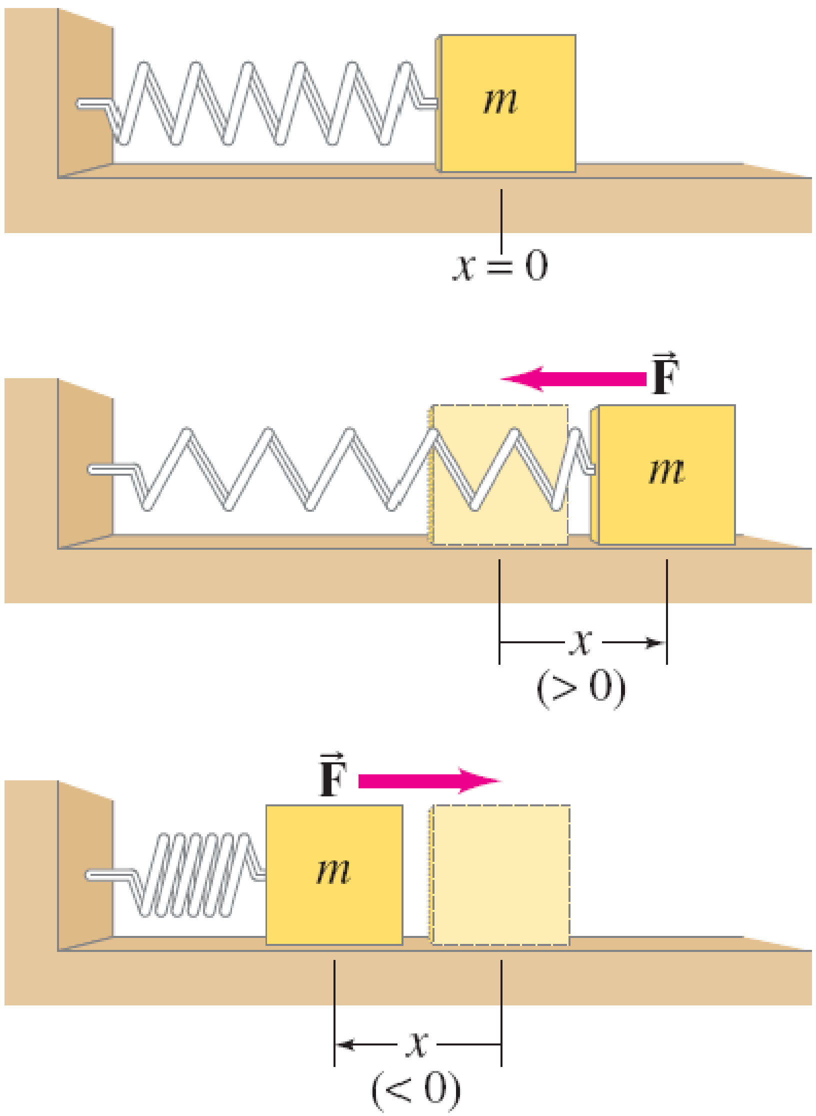
Κεφάλαιο 14
Ταλαντώσεις



Περιεχόμενα 14

- Ταλαντώσεις Ελατηρίου
- Απλή αρμονική κίνηση
- Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή
- Σχέση απλού αρμονικού ταλαντωτή και κυκλικής κίνησης
- Το απλό εκκρεμές
- Το φυσικό εκκρεμές και το στροφικό εκκρεμές
- Εφησυχασμός Ταλάντωσης
- Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις και Συντονισμός

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου



Όταν ένα αντικείμενο **δονείται** ή **ταλαντεύεται** μπρος-πίσω διανύοντας ένα διάστημα σε τακτό χρονικό διάστημα η κίνηση ονομάζεται **περιοδική**. Το σύστημα **μάζας** και **ελατηρίου** αποτελεί ένα μοντέλο περιοδικού συστήματος

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου

Υποθέτουμε ότι σε μια επιφάνεια δεν υπάρχουν τριβές. Υπάρχει ένα σημείο όπου το ελατήριο ούτε συμπιέζεται ούτε τεντώνεται. Το σημείο αυτό ονομάζεται **σημείο ισορροπίας**. Η **μετατόπιση** μετριέται σε σχέση με το σημείο αυτό ($x = 0$ στην προηγούμενη διαφάνεια).

Η **δύναμη** που ασκείται στο ελατήριο είναι ανάλογη της **μετατόπισης**:

$$F = -kx.$$

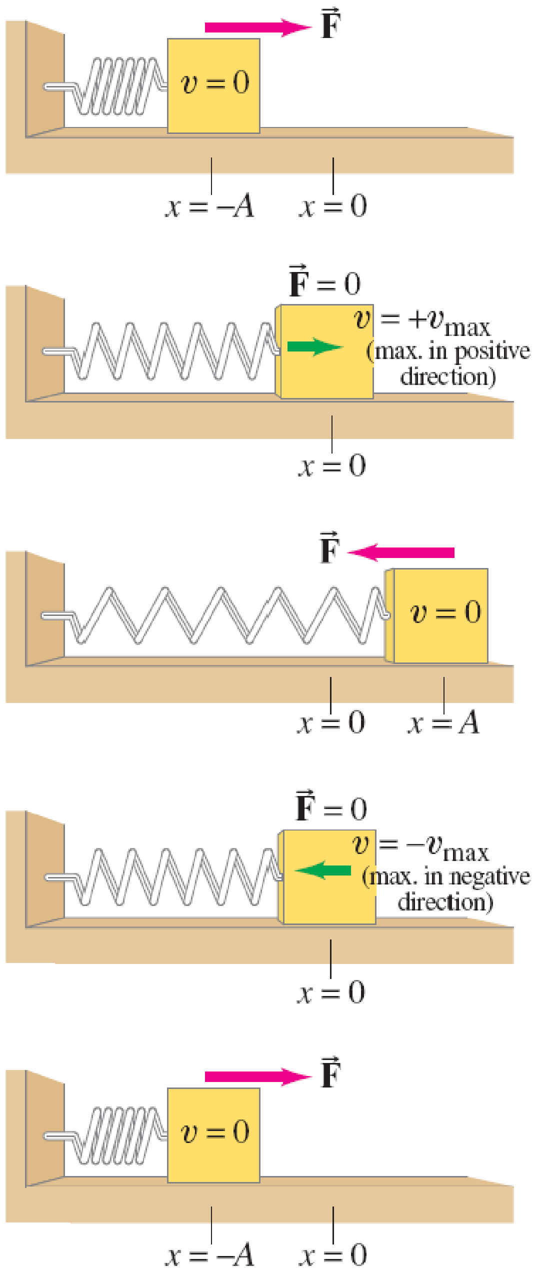
14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου

- Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη είναι επαναφοράς—δηλ κατευθύνεται προς το σημείο ισορροπίας.

- k είναι η σταθερά ελατηρίου.

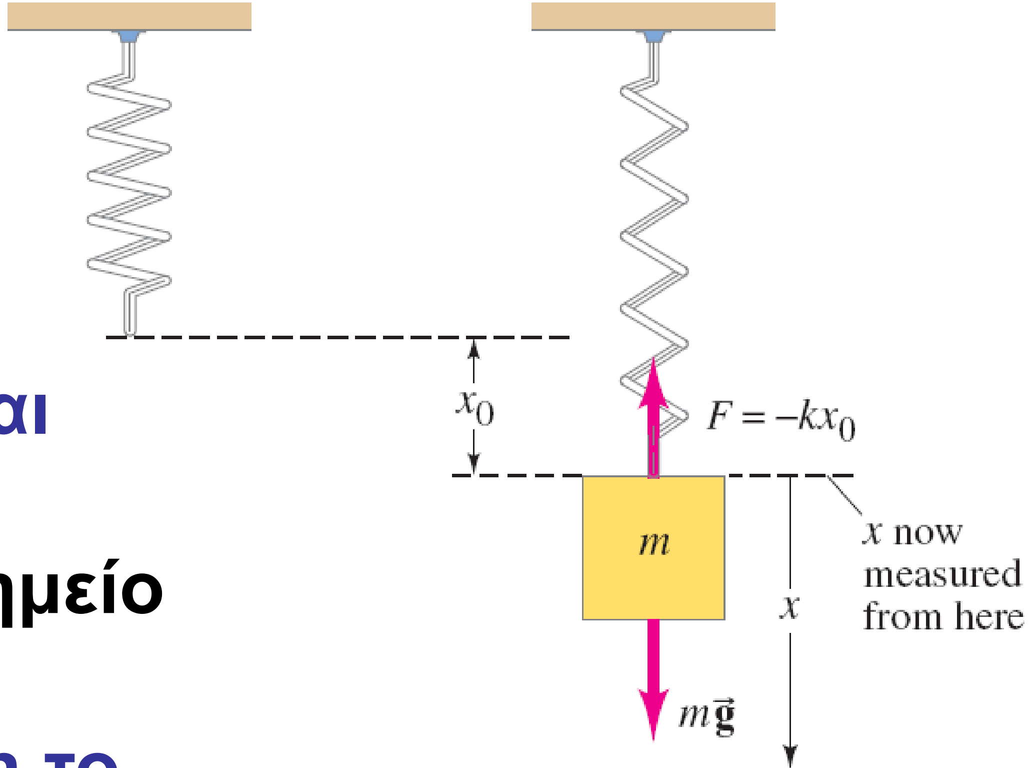
- Η δύναμη δεν είναι σταθερή, επομένως η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή.

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου



- Η μετατόπιση μετριέται από το σημείο ισορροπίας.
- Το Πλάτος είναι η μέγιστη μετατόπιση.
- Ένας κύκλος είναι μια πλήρης κίνηση από και προς το σημείο ισορροπίας.
- Η περίοδος είναι ο χρόνος που απαιτείται για ένα πλήρη κύκλο.
- Η συχνότητα είναι ο αριθμός των κύκλων ανά δευτερόλεπτο.

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου



Ένα ελατήριο κρέμεται **κατακόρυφα**, η μόνη αλλαγή είναι στο **σημείο ισορροπίας**, όπου σε αυτήν την περίπτωση το σημείο αυτό είναι εκεί όπου η δύναμη της βαρύτητας εξισώνεται με την δύναμη του ελατηρίου.

14-1 Ταλαντώσεις Ελατηρίου

Μια τετραμελής οικογένεια ζυγίζει 200 kg, και επιβιβάζονται στο αυτοκίνητό τους που ζυγίζει 1200-kg, και τα ελατήρια του αυτοκινήτου (αμορτισέρ) συμπιέζονται κατά 3.0 cm. (a) Εάν υποθέσουμε ότι τα τέσσερα ελατήρια συμπεριφέρονται ως ένα, ποια είναι η σταθερά του ελατηρίου (b) Πόσο θα χαμηλώσει το αυτοκίνητο εάν φορτωθεί με 300 kg αντί 200 kg;

APPROACH We use Hooke's law: the weight of the people, mg, causes a 3.0-cm displacement.

SOLUTION (*a*) The added force of $(200\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) = 1960\,\text{N}$ causes the springs to compress 3.0×10^{-2} m. Therefore (Eq. 14–1), the spring constant is

$$k = \frac{F}{x} = \frac{1960\,\text{N}}{3.0 \times 10^{-2}\,\text{m}} = 6.5 \times 10^4\,\text{N/m}.$$

(*b*) If the car is loaded with 300 kg, Hooke's law gives

$$x = \frac{F}{k} = \frac{(300\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)}{(6.5 \times 10^4\,\text{N/m})} = 4.5 \times 10^{-2}\,\text{m},$$

or 4.5 cm.

NOTE In (*b*), we could have obtained x without solving for k: since x is proportional to F, if 200 kg compresses the spring 3.0 cm, then 1.5 times the force will compress the spring 1.5 times as much, or 4.5 cm.

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Σε κάθε σύστημα που δονείται επειδή η δύναμη είναι ανάλογη της αρνητικής μετατόπισης αποτελεί απλή αρμονική κίνηση και συχνά αποκαλείται απλός αρμονικός ταλαντωτής.

Θέτοντας $F = -kx$ στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα καταλήγουμε στην εξίσωση της κίνησης:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

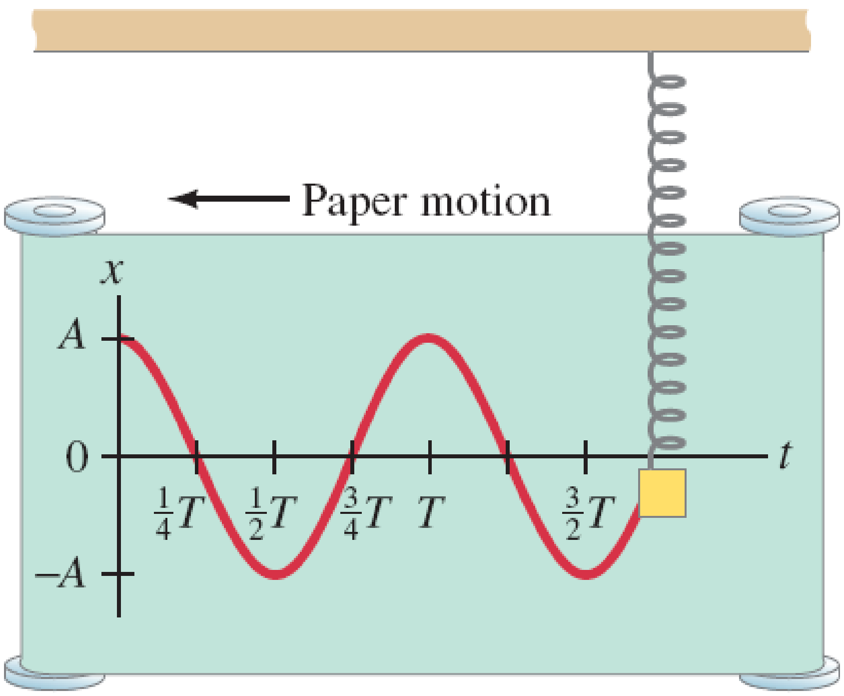
Μία λύση της εξίσωσης αυτής έχει την μορφή:

$$x = A\cos(\omega t + \phi).$$

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Με αντικατάσταση βλέπουμε ότι η λύση αυτή επαληθεύει την εξίσωση όπου:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$



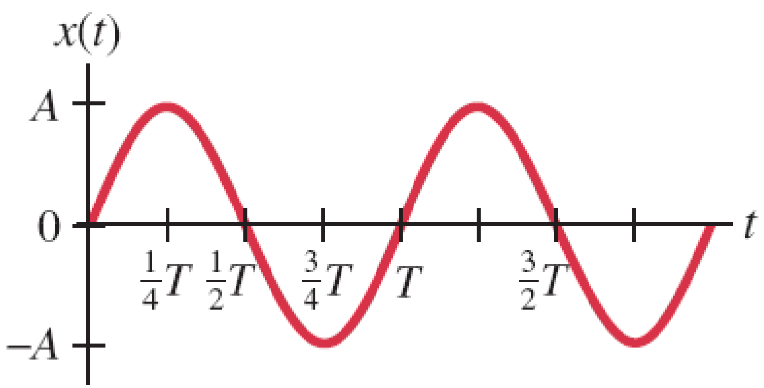
Οι σταθερές *A* και *φ* προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. *A* είναι το πλάτος και *φ* η φάση στο χρόνο *t* = 0.

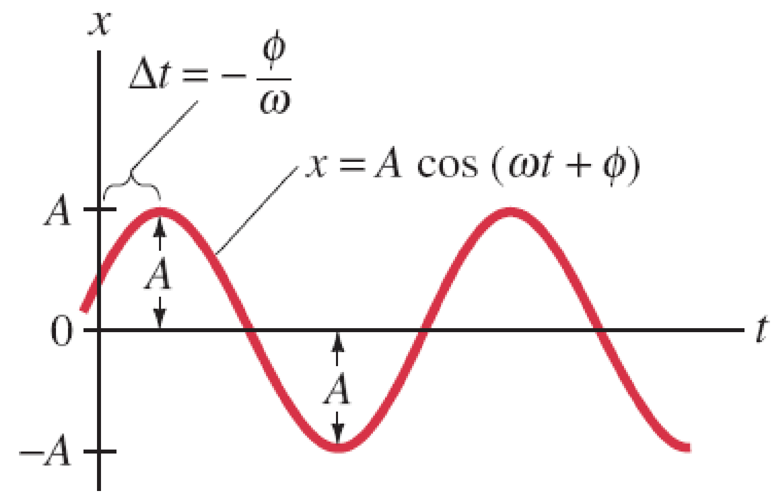
14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Η ταχύτητα προσδιορίζεται από την παράγωγο της μετατόπισης:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \phi)] = -\omega A\sin(\omega t + \phi).$$

Ο ρόλος της φάσης φ φαίνεται στο διάγραμμα:





14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Επειδή $\omega = 2\pi f = \sqrt{k/m},$ **τότε**

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Προσδιορίστε την περίοδο και την συχνότητα ταλάντωσης ενός αυτοκινήτου που πέρασε πάνω από ένα εμπόδιο. Η μάζα του αυτοκινήτου είναι 1400 kg, και τα αμορτισέρ του έχουν σταθερά ελατηρίου 6.5 x 10^4 N/m. Υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο ταλαντεύεται κατακόρυφα.

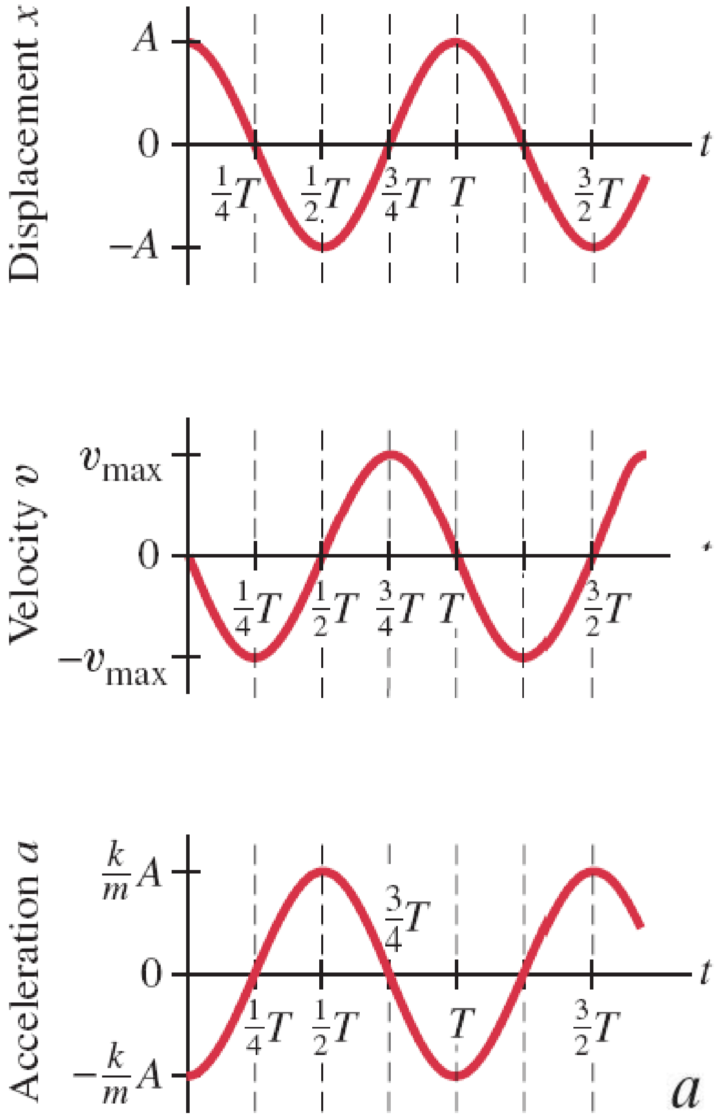
APPROACH We put $m = 1400\,\text{kg}$ and $k = 6.5 \times 10^4\,\text{N/m}$ from Example 14–1a into Eqs. 14–7.

SOLUTION From Eq. 14–7b,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1400\,\text{kg}}{6.5 \times 10^4\,\text{N/m}}} = 0.92\,\text{s},$$

or slightly less than a second. The frequency $f = 1/T = 1.09\,\text{Hz}$.

14-2 Απλή αρμονική κίνηση



Η ταχύτητα και η επιτάχυνση για την αρμονική κίνηση περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi).$$

14-2 Απλή αρμονική κίνησης

Σε ένα εργοστάσιο ένας μεγάλος ηλεκτροκινητήρας κάνει το δάπεδο του κτιρίου να τρέμει με συχνότητα 10 Hz. Το πλάτος της δόνησης είναι περίπου 3.0 mm. Βρείτε την μέγιστη επιτάχυνση του δαπέδου.

APPROACH Assuming the motion of the floor is roughly SHM we can make an estimate for the maximum acceleration using Eq. 14–9b.

SOLUTION Given $\omega = 2\pi f = (2\pi)(10\,\mathrm{s}^{-1}) = 62.8\,\mathrm{rad/s}$, then Eq. 14–9b gives

$$a_{\max} = \omega^2 A = (62.8\,\mathrm{rad/s})^2(0.0030\,\mathrm{m}) = 12\,\mathrm{m/s^2}.$$

NOTE The maximum acceleration is a little over g, so when the floor accelerates down, objects sitting on the floor will actually lose contact momentarily, which will cause noise and serious wear.

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Ο κώνος ενός ηχείου ταλαντεύεται με συχνότητα 262 Hz (“middle C”). Το πλάτος του κέντρου είναι A = 1.5 x 10^{-4} m, και σε χρόνο t = 0, x = A. (a) Ποια εξίσωση περιγράφει την κίνηση του κέντρου; (b) Ποια είναι η ταχύτητα και η επιτάχυνση σαν συνάρτηση του χρόνου; (c) Ποια είναι η μετατόπιση όταν t = 1.00 ms (= 1.00 x 10^{-3} s);

APPROACH The motion begins $(t = 0)$ with the cone at its maximum displacement $(x = A$ at $t = 0)$. So we use the cosine function, $x = A\cos\omega t$, with $\phi = 0$.

SOLUTION (*a*) The amplitude $A = 1.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$ and

$$\omega = 2\pi f = (6.28\,\mathrm{rad})(262\,\mathrm{s}^{-1}) = 1650\,\mathrm{rad/s}.$$

The motion is described as

$$x = A\cos\omega t = (1.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m})\cos(1650t),$$

where t is in seconds.

(*b*) The maximum velocity, from Eq. 14–9a, is

$$v_{\max} = \omega A = (1650\,\mathrm{rad/s})(1.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}) = 0.25\,\mathrm{m/s},$$

so

$$v = -(0.25\,\mathrm{m/s})\sin(1650t).$$

From Eq. 14–9b the maximum acceleration is $a_{\max} = \omega^2 A = (1650\,\mathrm{rad/s})^2(1.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}) = 410\,\mathrm{m/s^2}$, which is more than 40 g's. Then

$$a = -(410\,\mathrm{m/s^2})\cos(1650t).$$

(*c*) At $t = 1.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$,

$$\begin{aligned} x = A\cos\omega t &= (1.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m})\cos[(1650\,\mathrm{rad/s})(1.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{s})] \\ &= (1.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{m})\cos(1.65\,\mathrm{rad}) = -1.2 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

NOTE Be sure your calculator is set in RAD mode, not DEG mode, for these $\cos\omega t$ calculations.

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Ένα ελατήριο τεντώνεται κατά 0.150 m όταν μια μάζα 0.300-kg «κρεμαστεί» πάνω του. Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία οριζοντίως πάνω σε τραπέζι άνευ τριβής. Η μάζα μετατοπίζεται έτσι ώστε να συμπιέσει το ελατήριο κατά 0.100 m από την θέση ισορροπίας. Να προσδιοριστούν: (a) η σταθερά του ελατηρίου είναι k και η γωνιακή συχνότητα ω; (b) το πλάτος της οριζόντιας ταλάντωσης A; (c) το μέγεθος της μέγιστης ταχύτητας v_{max}; (d) το μέγεθος της μέγιστης επιτάχυνσης a_{max} της μάζας; (e) η περίοδος T και η συχνότητα f; (f) η μετατόπιση x σαν συνάρτηση χρόνου και (g) η ταχύτητα όταν t = 0.150 s.

APPROACH When the 0.300-kg mass hangs at rest from the spring as in Fig. 14–3b, we apply Newton's second law for the vertical forces: $\Sigma F = 0 = mg - kx_0$, so $k = mg/x_0$. For the horizontal oscillations, the amplitude is given, and the other quantities can be found from Eqs. 14–4, 14–5, 14–7, and 14–9. We choose x positive to the right.

SOLUTION (*a*) The spring stretches 0.150 m due to the 0.300-kg load, so

$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{mg}{x_0} = \frac{(0.300\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2)}{0.150\,\text{m}} = 19.6\,\text{N/m}.$$

From Eq. 14–5,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19.6\,\text{N/m}}{0.300\,\text{kg}}} = 8.08\,\text{s}^{-1}.$$

(*b*) The spring is now horizontal (on a table). It is compressed 0.100 m from equilibrium and is given no initial speed, so $A = 0.100\,\text{m}$.

(*c*) From Eq. 14–9a, the maximum velocity has magnitude

$$v_{\text{max}} = \omega A = (8.08\,\text{s}^{-1})(0.100\,\text{m}) = 0.808\,\text{m/s}.$$

(*d*) Since $F = ma$, the maximum acceleration occurs where the force is greatest—that is, when $x = \pm A = \pm 0.100\,\text{m}$. Thus its magnitude is

$$a_{\text{max}} = \frac{F}{m} = \frac{kA}{m} = \frac{(19.6\,\text{N/m})(0.100\,\text{m})}{0.300\,\text{kg}} = 6.53\,\text{m/s}^2.$$

[This result could also have been obtained directly from Eq. 14–9b, but it is often useful to go back to basics as we did here.]

(*e*) Equations 14–7b and 14–2 give

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.300\text{ kg}}{19.6\text{ N/m}}} = 0.777\text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 1.29\text{ Hz.}$$

(*f*) The motion begins at a point of maximum compression. If we take x positive to the right in Fig. 14–2, then at $t = 0, x = -A = -0.100\text{ m}$. So we need a sinusoidal curve that has its maximum negative value at $t = 0$; this is just a negative cosine:

$$x = -A\cos\omega t.$$

To write this in the form of Eq. 14–4 (no minus sign), recall that $\cos\theta = -\cos(\theta - \pi)$. Then, putting in numbers, and recalling $-\cos\theta = \cos(\pi - \theta) = \cos(\theta - \pi)$, we have

$$\begin{aligned} x &= -(0.100\text{ m})\cos 8.08t \\ &= (0.100\text{ m})\cos(8.08t - \pi), \end{aligned}$$

where t is in seconds and x is in meters. Note that the phase angle (Eq. 14–4) is $\phi = -\pi$ or $-180°$.

(*g*) The velocity at any time t is dx/dt (see also part *c*):

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A\sin\omega t = (0.808\text{ m/s})\sin 8.08t.$$

At $t = 0.150\text{ s}$, $v = (0.808\text{ m/s})\sin(1.21\text{ rad}) = 0.756\text{ m/s}$, and is to the right (+).

14-2 Απλή αρμονική κίνηση

Το ελατήριο του παραδείγματος 14–5 (όπου ω = 8.08 s^{-1}) συμπιέζεται κατά 0.100 m από την θέση ισορροπίας (x_0 = -0.100 m) αλλά δέχεται μια επιπλέον ώθηση στην διεύθυνση +x ώστε να φτάσει την ταχύτητα v_0 = 0.400 m/s. Προσδιορίστε (a) την φάση φ, (b) το πλάτος A, και (c) την μετατόπιση x σαν συνάρτηση του χρόνου, $x(t)$.

APPROACH We use Eq. 14–8a, at $t = 0$, to write $v_0 = -\omega A \sin\phi$, and Eq. 14–4 to write $x_0 = A\cos\phi$. Combining these, we can obtain ϕ. We obtain A by using Eq. 14–4 again at $t = 0$. From Example 14–5, $\omega = 8.08\,\mathrm{s}^{-1}$.

SOLUTION (*a*) We combine Eqs. 14–8a and 14–4 at $t = 0$ and solve for the tangent:

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{(v_0/-\omega A)}{(x_0/A)} = -\frac{v_0}{\omega x_0} = -\frac{0.400\,\mathrm{m/s}}{(8.08\,\mathrm{s}^{-1})(-0.100\,\mathrm{m})} = 0.495.$$

A calculator gives the angle as 26.3°, but we note from this equation that both the sine and cosine are negative, so our angle is in the third quadrant. Hence

$$\phi = 26.3^\circ + 180^\circ = 206.3^\circ = 3.60\,\mathrm{rad}.$$

(*b*) Again using Eq. 14–4 at $t = 0$, as given in the Approach above,

$$A = \frac{x_0}{\cos\phi} = \frac{(-0.100\,\mathrm{m})}{\cos(3.60\,\mathrm{rad})} = 0.112\,\mathrm{m}.$$

(*c*) $x = A\cos(\omega t + \phi) = (0.112\,\mathrm{m})\cos(8.08t + 3.60)$.

14-3 Η ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου δίδεται από την σχέση:

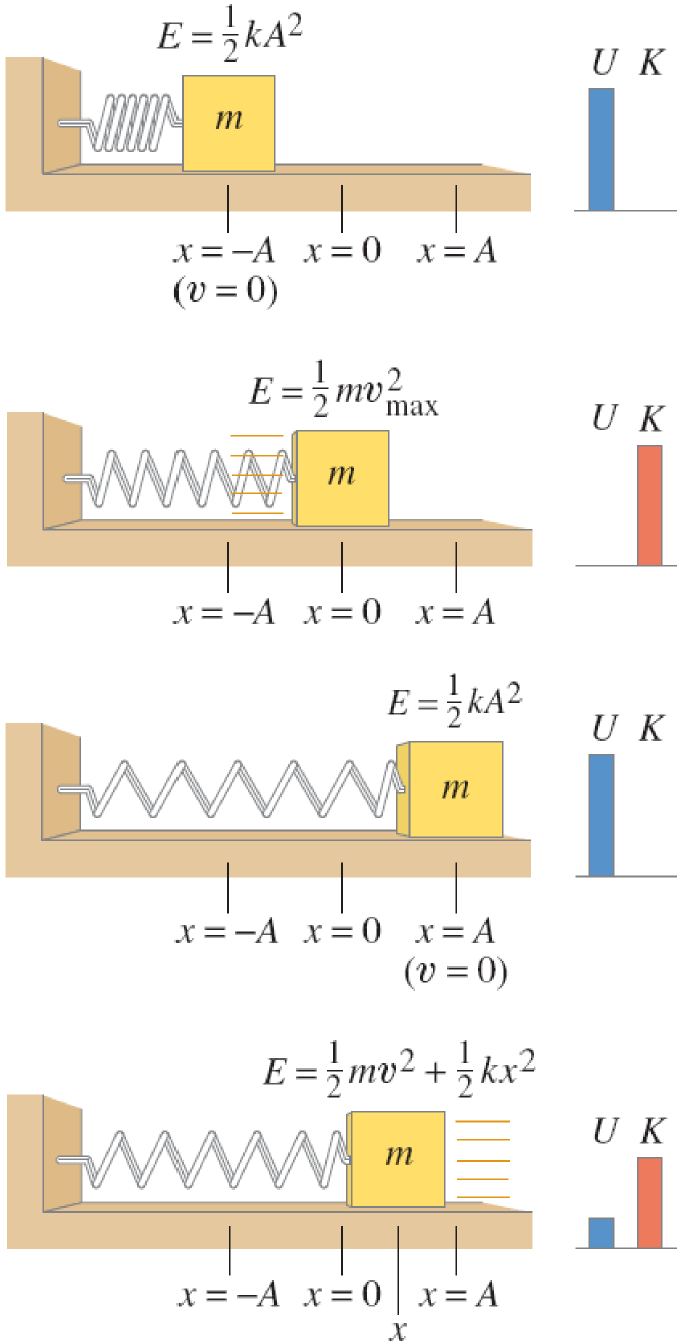
$$U = -\int F\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Η μηχανική ενέργειας δίδεται από την σχέση:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Απουσία τριβών η συνολική μηχανική ενέργεια διατηρείται.

14-3 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή



Στα **όρια** της ταλάντωσης η ενέργεια είναι **μόνο δυναμική.**

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

Στη **θέση ισορροπίας** όλη η ενέργεια είναι **κινητική.**

14-3 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

Η συνολική κινητική ενέργεια είναι, $\frac{1}{2}kA^2.$

επομένως:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

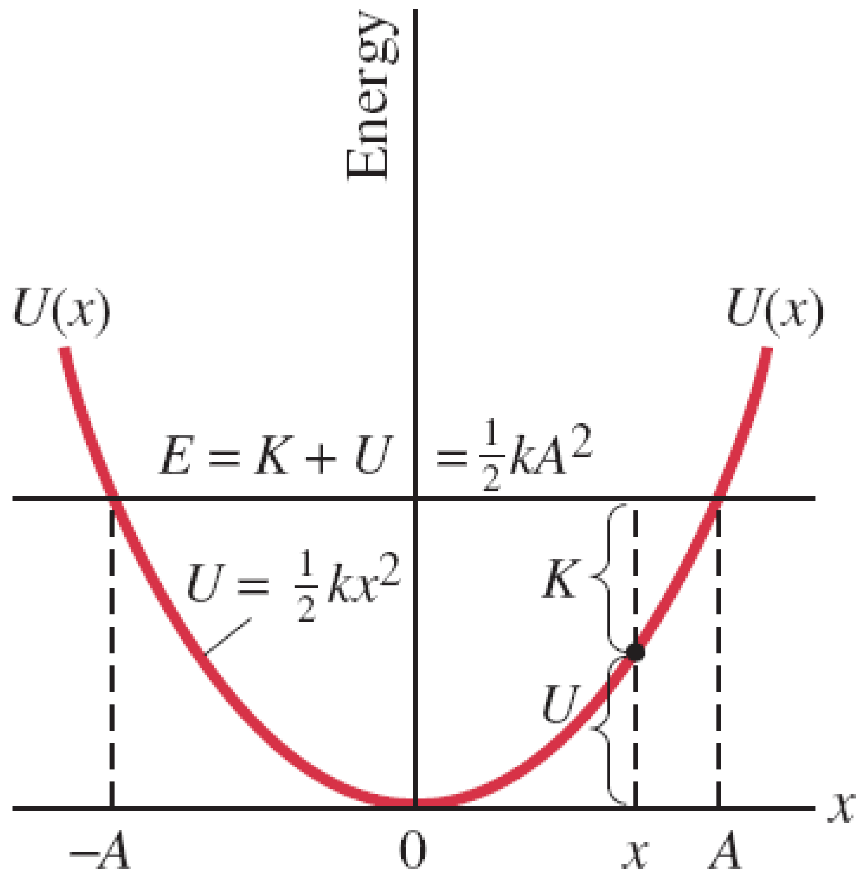
Λύνουμε ως προς την ταχύτητα και βρίσκουμε:

$$v = \pm v_{\max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

όπου $v_{\max}^2 = (k/m)A^2.$

14-3 Η ενέργειας απλού ταλαντωτή

Γραφική παράσταση που απεικονίζει την δυναμική ενέργεια. Βλέπουμε ότι η συνολική ενέργεια είναι σταθερή



14-3 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

Για το απλό αρμονικό ταλαντωτή του παραδείγματος 14–5 (όπου k = 19.6 N/m, A = 0.100 m, x = -(0.100 m) cos 8.08t, and v = (0.808 m/s) sin 8.08t), προσδιορίστε (a) την συνολική ενέργεια (b) την κινητική και την δυναμική ενέργεια σαν συνάρτηση του χρόνου, (c) την ταχύτητα όταν η μάζα βρίσκεται 0.050 m από την θέση ισορροπίας, (d) την κινητική και δυναμική ενέργεια στο ήμισυ του πλάτους. (x = ± A/2).

APPROACH We use conservation of energy for a spring–mass system, Eqs. 14–10 and 14–11.

SOLUTION (*a*) From Example 14–5, $k = 19.6\,\mathrm{N/m}$ and $A = 0.100\,\mathrm{m}$, so the total energy E from Eq. 14–10a is

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\,\mathrm{N/m})(0.100\,\mathrm{m})^2 = 9.80 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}.$$

(*b*) We have, from parts (*f*) and (*g*) of Example 14–5, $x = -(0.100\,\mathrm{m})\cos 8.08t$ and $v = (0.808\,\mathrm{m/s})\sin 8.08t$, so

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\,\mathrm{N/m})(0.100\,\mathrm{m})^2\cos^2 8.08t = \left(9.80 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}\right)\cos^2 8.08t$$

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.300\,\mathrm{kg})(0.808\,\mathrm{m/s})^2\sin^2 8.08t = \left(9.80 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}\right)\sin^2 8.08t.$$

(*c*) We use Eq. 14–11b and find

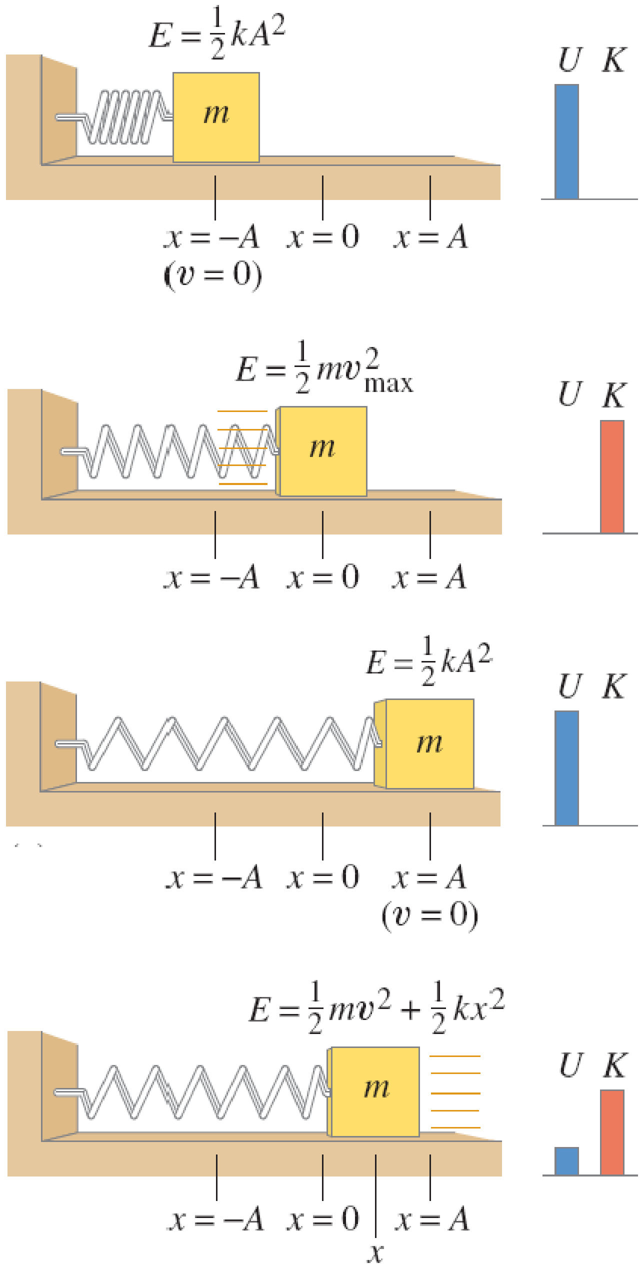
$$v = v_{\max}\sqrt{1 - x^2/A^2} = (0.808\,\mathrm{m/s})\sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = 0.70\,\mathrm{m/s}.$$

(*d*) At $x = A/2 = 0.050\,\mathrm{m}$, we have

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\,\mathrm{N/m})(0.050\,\mathrm{m})^2 = 2.5 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

$$K = E - U = 7.3 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}.$$

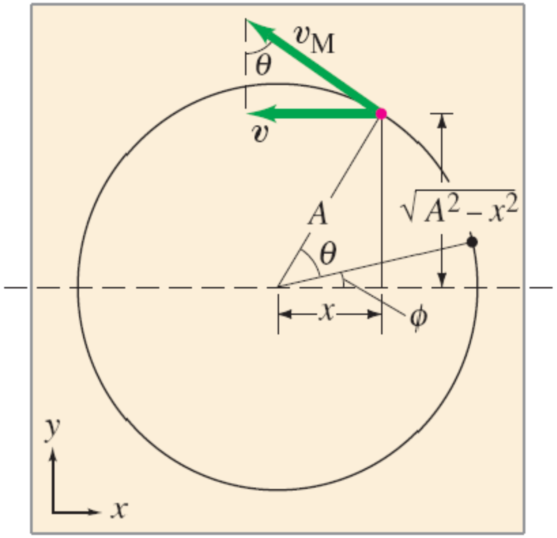
14-3 Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή



Υποθέστε ότι ένα ελατήριο «τεντώνεται» στο διπλάσιο του πλάτους της ταλάντωσης (στο $x = 2A$). Τι συμβαίνει (a) στην ενέργεια του συστήματος (b) στην μέγιστη ταχύτητα της ταλαντευόμενης μάζας, (c) την μέγιστη ταχύτητα της ταλαντευόμενης μάζας

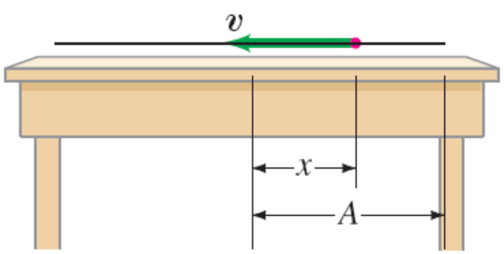
RESPONSE (*a*) From Eq. 14–10a, the total energy is proportional to the square of the amplitude A, so stretching it twice as far quadruples the energy $(2^2 = 4)$. You may protest, "I did work stretching the spring from $x = 0$ to $x = A$. Don't I do the same work stretching it from A to $2A$?" No. The force you exert is proportional to the displacement x, so for the second displacement, from $x = A$ to $2A$, you do more work than for the first displacement ($x = 0$ to A). (*b*) From Eq. 14–10b, we can see that when the energy is quadrupled, the maximum velocity must be doubled. $[v_{\mathrm{max}} \propto \sqrt{E} \propto A.]$ (*c*) Since the force is twice as great when we stretch the spring twice as far, the acceleration is also twice as great: $a \propto F \propto x$.

14-4 Σχέση αρμονικού ταλαντωτή και κυκλικής κίνησης



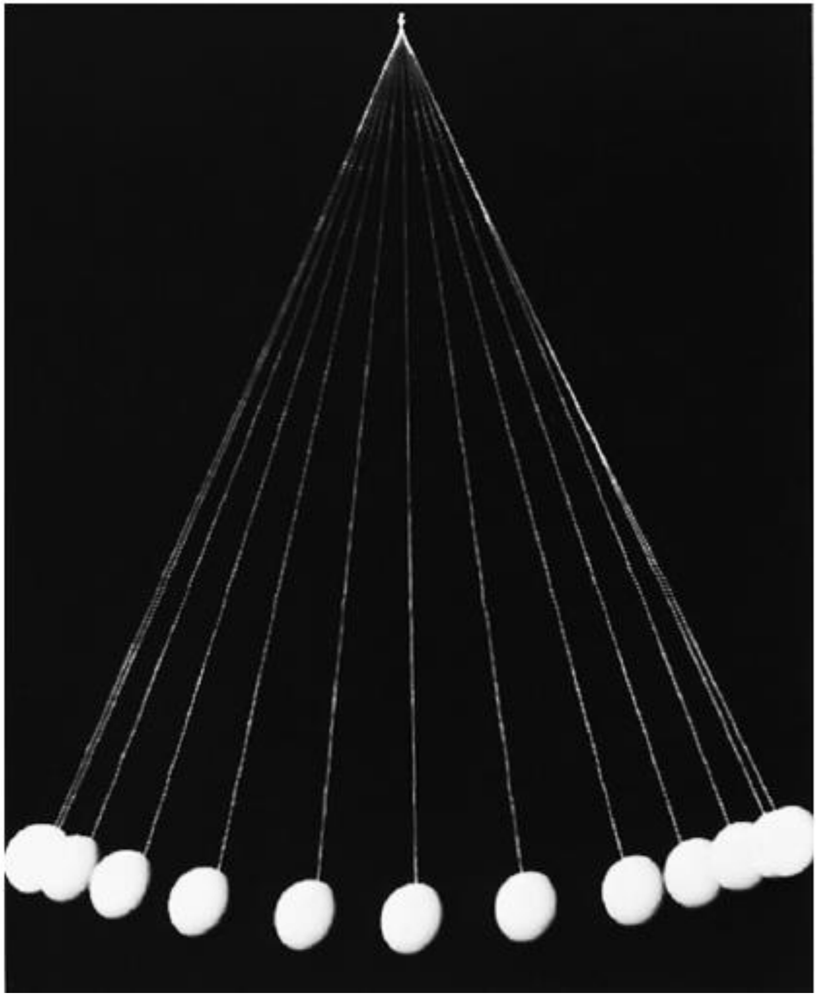
Η προβολή της γραμμικής ταχύτητας πάνω στο άξονα *x* ενός αντικειμένου που κινείται σε κύκλο με ακτίνα *A* με σταθερή ταχύτητα v_M , βρίσκουμε ότι:

$$v = v_M \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$



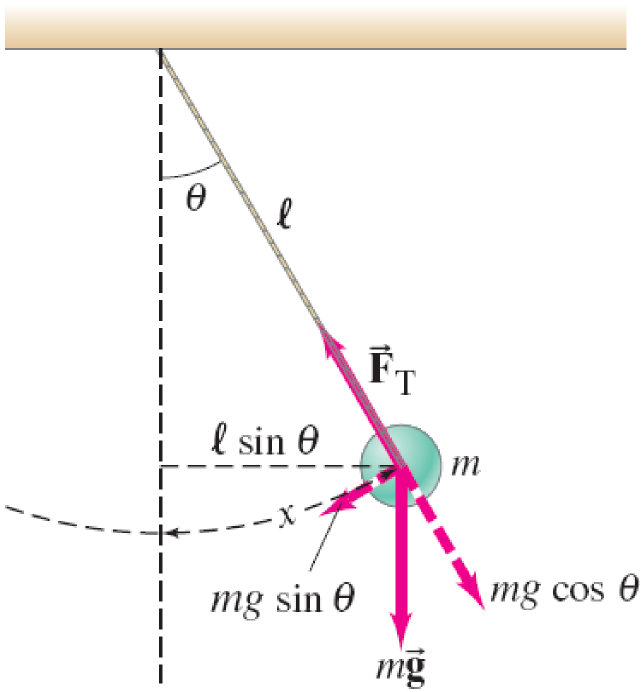
Η εξίσωση αυτή είναι ίδια με την ταχύτητα του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

14-5 Το απλό εκκρεμές



Το απλό εκκρεμές αποτελείται από μια μάζα που κρέμεται από λεπτό σχοινί, το οποίο υποθέτουμε ότι οι διαστάσεις του δεν μεταβάλλονται και η μάζα του είναι αμελητέα.

14-5 Το απλό εκκρεμές



$$F = -mg\sin\theta,$$

Για μικρές γωνίες sin *θ* ≈ *θ*.

14-5 Το απλό εκκρεμές

Επομένως για μικρές γωνίες

$$F \approx -\frac{mg}{L}x,$$

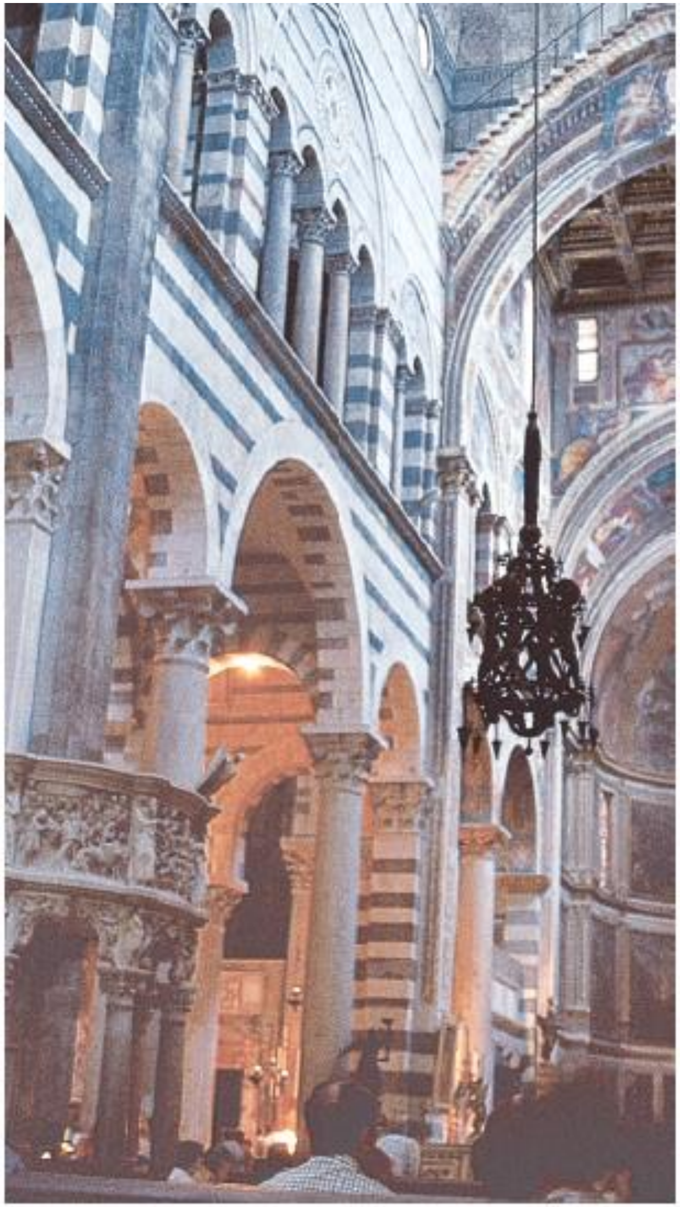
όπου $x = L\theta.$

Η περίοδος και η συχνότητα είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

14-5 Το απλό εκκρεμές



Επομένως εφόσον το σχοινί δεν έχει μάζα και για μικρό πλάτος η περίοδος είναι ανεξάρτητη της μάζας!

14-5 Το απλό εκκρεμές

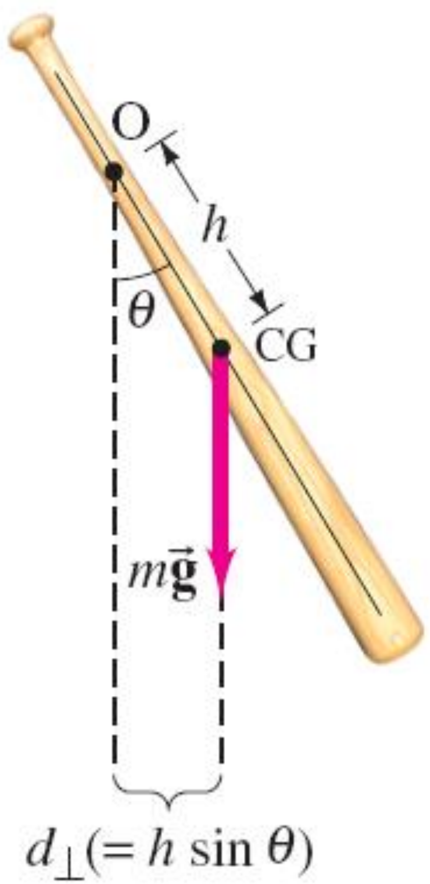
Ένας γεωλόγος χρησιμοποιεί ένα απλό εκκρεμές με μήκος 37.10 cm και συχνότητα 0.8190 Hz σε μια συγκεκριμένη τοποθεσία της γης. Ποια είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην τοποθεσία αυτή;

APPROACH We can use the length ℓ and frequency f of the pendulum in Eq. 14-12b, which contains our unknown, g.

SOLUTION We solve Eq. 14–12b for g and obtain

$$g = (2\pi f)^2 \ell = (6.283 \times 0.8190\,\mathrm{s}^{-1})^2 (0.3710\,\mathrm{m}) = 9.824\,\mathrm{m/s^2}.$$

14-6 Το Φυσικό εκκρεμές και το Torsional εκκρεμές



Το φυσικό εκκρεμές είναι οποιοδήποτε πραγματικό αντικείμενο που ταλαντεύεται μπρος-πίσω.

Η ροπή πέριξ του σημείου O είναι:

$$\tau = -mgh\sin\theta.$$

Με αντικατάσταση στο νόμο του Νεύτωνα βρίσκουμε:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\sin\theta.$$

14-6 Το Φυσικό εκκρεμές και το στροφικό εκκρεμές

Για μικρές γωνίες έχουμε:

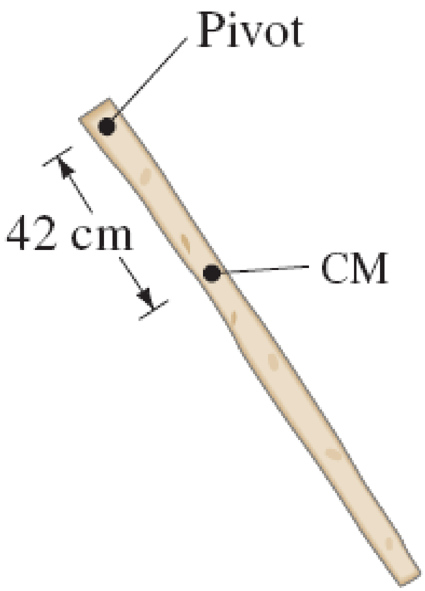
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0,$$

Που ταυτίζεται με την εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή όπου

$$\theta = \theta_{\max}\cos(\omega t + \phi),$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}.$$

14-6 Το Φυσικό εκκρεμές και το στροφικό εκκρεμές



Ένας εύκολος τρόπος για τον προσδιορισμό της ροπής αδράνειας ενός αντικειμένου γύρω από οποιοδήποτε άξονα μπορεί να γίνει μέσω της μέτρησης της συχνότητας ταλάντωσης γύρω από τον συγκεκριμένα άξονα. (a) Θεωρούμε μία ανομοιογενή ράβδο 1.0-kg που μπορεί και ισορροπεί σε σημείο 42 cm από την μια άκρη. Η περίοδος ταλάντωσης πέριξ του σημείου αυτού είναι 1.6 s. Πόση είναι η ροπή αδράνειας γύρω από το σημείο αυτό; (b) Πόση είναι η ροπή αδράνειας για άξονα περιστροφής που περνάει από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος στην ράβδο.

APPROACH We put the given values into Eq. 14–14 and solve for I. For (b) we use the parallel-axis theorem (Section 10–7).

SOLUTION (a) Given $T = 1.6\,\mathrm{s}$, and $h = 0.42\,\mathrm{m}$, Eq. 14–14 gives

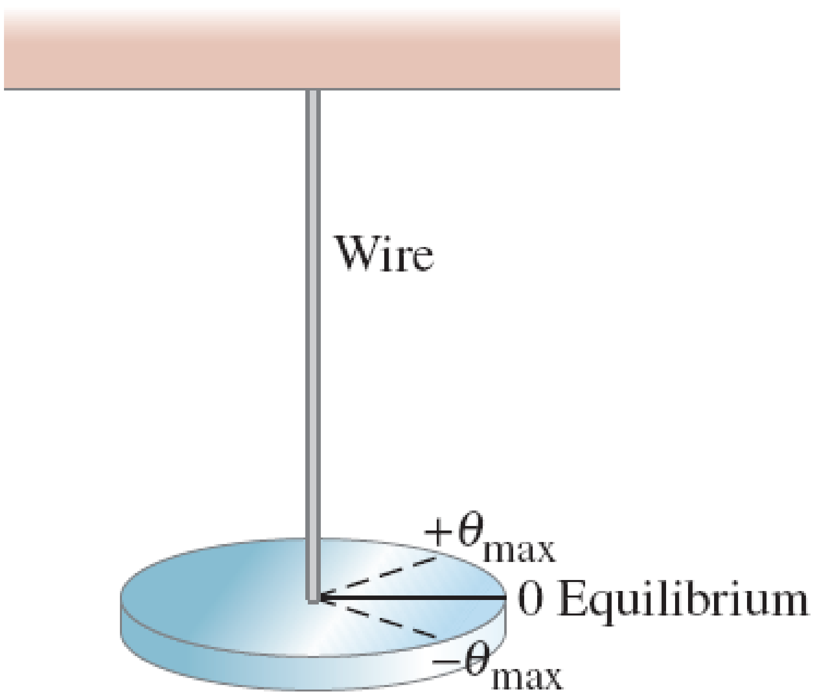
$$I = mghT^2/4\pi^2 = 0.27\,\mathrm{kg \cdot m^2}.$$

(b) We use the parallel-axis theorem, Eq. 10–17. The CM is where the stick balanced, 42 cm from the end, so

$$I_{\mathrm{CM}} = I - mh^2 = 0.27\,\mathrm{kg \cdot m^2} - (1.0\,\mathrm{kg})(0.42\,\mathrm{m})^2 = 0.09\,\mathrm{kg \cdot m^2}.$$

NOTE Since an object does not oscillate about its CM, we cannot measure I_{CM} directly, but the parallel-axis theorem provides a convenient method to determine I_{CM}.

14-6 Το Φυσικό εκκρεμές και το στροφικό εκκρεμές



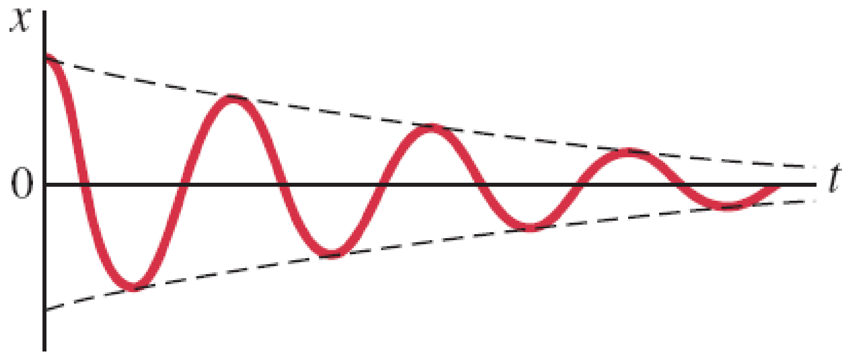
Το στροφικό εκκρεμές «στρίβει» αντί να «κουνιέται». Η κίνηση είναι αρμονική εφόσον το έλασμα (καλώδιο) ακολουθεί το νόμο του Hooke

$$\omega = \sqrt{K/I}.$$

(*K* είναι μια σταθερά του καλωδίου.)

14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης

Όταν ασκούνται δυνάμεις τριβής ή αντίστασης η ταλάντωση αποσβένει, φθίνει, είναι φθίνουσα ή αποσβεννυμένη.



Εάν $$F_{\text{damping}} = -bv,$$

τότε $$ma = -kx - bv.$$

14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης

επομένως $$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

εάν το b είναι μικρό τότε η λύση που προκύπτει είναι

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$$

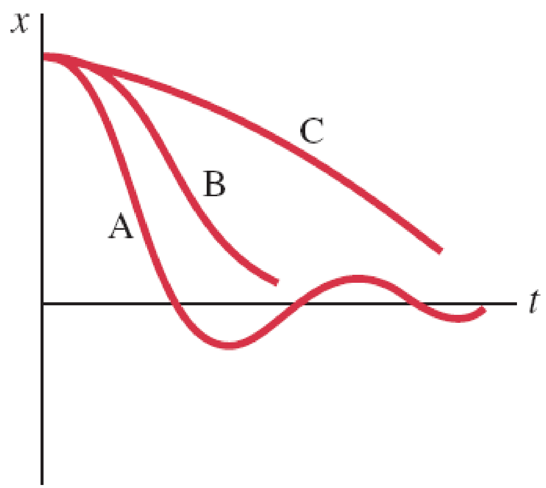
θέτουμε $$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

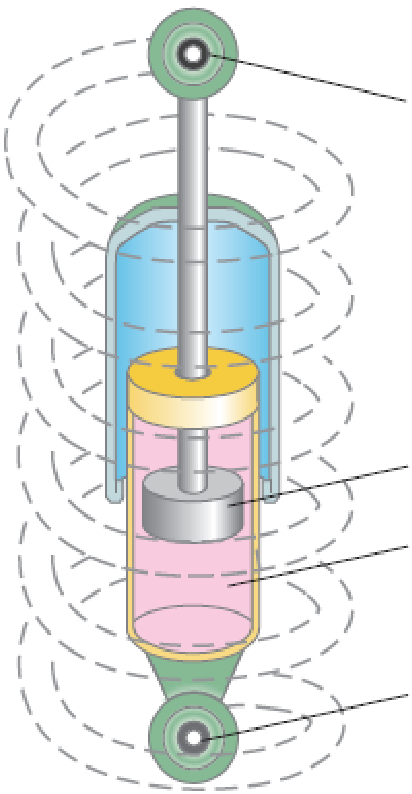
14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης

Εάν $b^2 > 4mk$, η ω' γίνεται φανταστική, και το σύστημα είναι overdamped (C) (μεγάλη απόσβεση).

Εάν $b^2 = 4mk$, το σύστημα είναι critically damped (κρίσιμη απόσβεση) (B) —όπου το σύστημα φτάνει στην κατάσταση ισορροπίας στο συντομότερο δυνατόν χρόνο.



14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης

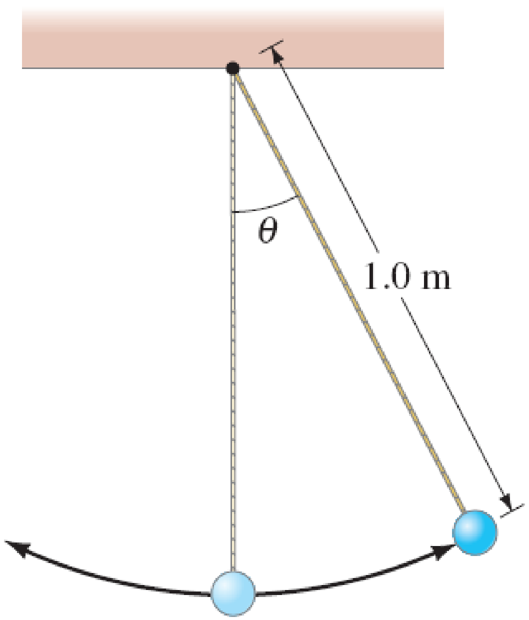


Υπάρχουν συστήματα όπου ο εφησυχασμός είναι ανεπιθύμητος, π.χ. τα ρολόγια.

Σε άλλες περιπτώσεις όπως τα αμορτισέρ του αυτοκινήτου, ή στην αντισεισμική θωράκιση κτιρίων ,

ο εφησυχασμός είναι μέρος του σχεδιασμού.

14-7 Απόσβεση Αρμονικής Κίνησης



Ένα απλό εκκρεμές με μήκος 1.0 m, τίθεται σε κίνηση με μικρό πλάτος. 5.0 λεπτά αργότερα το πλάτος του είναι μόνο 50% του αρχικού. (a) Πόσο είναι το γ της ταλάντωσης (b) Πόσο μεταβάλλεται η συχνότητα f', από την συχνότητα f ***όταν η κίνηση δεν έχει απόσβεση;***

APPROACH We assume the damping force is proportional to angular speed, $d\theta/dt$. The equation of motion for damped harmonic motion is

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t, \quad \text{where} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{and} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}},$$

for motion of a mass on the end of a spring. For the simple pendulum without damping, we saw in Section 14–5 that

$$F = -mg\theta$$

for small θ. Since $F = ma$, where a can be written in terms of the angular acceleration $\alpha = d^2\theta/dt^2$ as $a = \ell\alpha = \ell\, d^2\theta/dt^2$, then $F = m\ell\, d^2\theta/dt^2$, and

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0.$$

Introducing a damping term, $b(d\theta/dt)$, we have

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0,$$

which is the same as Eq. 14–15 with θ replacing x, and ℓ and g replacing m and k.

SOLUTION (*a*) We compare Eq. 14–15 with our equation just above and see that our equation $x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$ becomes an equation for θ with

$$\gamma = \frac{b}{2\ell} \quad \text{and} \quad \omega' = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4\ell^2}}.$$

At $t = 0$, we rewrite Eq. 14–16 with θ replacing x as

$$\theta_0 = Ae^{-\gamma \cdot 0}\cos\omega' \cdot 0 = A.$$

Then at $t = 5.0\,\text{min} = 300\,\text{s}$, the amplitude given by Eq. 14–16 has fallen to $0.50\,A$, so

$$0.50A = Ae^{-\gamma(300\,\text{s})}.$$

We solve this for γ and obtain $\gamma = \ln 2.0/(300\,\text{s}) = 2.3 \times 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$.

(*b*) We have $\ell = 1.0\,\text{m}$, so $b = 2\gamma\ell = 2(2.3 \times 10^{-3}\,\text{s}^{-1})(1.0\,\text{m}) = 4.6 \times 10^{-3}\,\text{m/s}$. Thus $(b^2/4\ell^2)$ is very much less than $g/\ell\,(= 9.8\,\text{s}^{-2})$, and the angular frequency of the motion remains almost the same as that of the undamped motion. Specifically (see Eq. 14–20),

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left[1 - \frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right)\right]$$

where we used the binomial expansion. Then, with $f = (1/2\,\pi)\sqrt{g/\ell}$ (Eq. 14–12b),

$$\frac{f - f'}{f} \approx \frac{1}{2}\frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right) = 2.7 \times 10^{-7}.$$

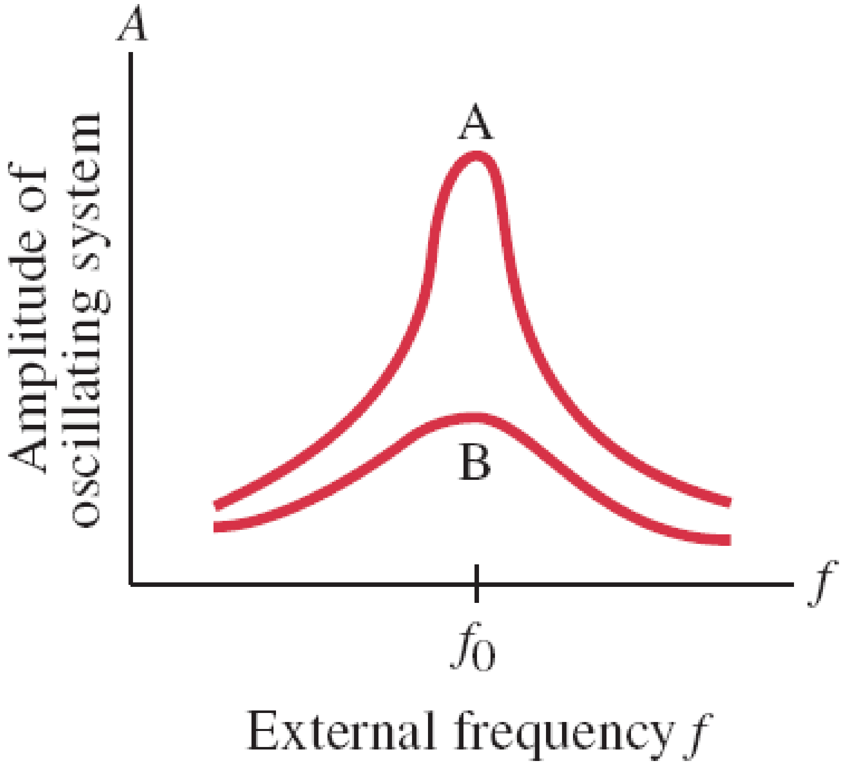
So f' differs from f by less than one part in a million.

14-8 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση και Συντονισμός

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις παρατηρούνται όταν δρα πάνω στο σύστημα μια **περιοδική δύναμη**. Η συχνότητα της δύναμης δεν είναι απαραίτητα ίδια με την φυσική συχνότητα του συστήματος.

Όταν οι δύο συχνότητες ταυτιστούν μιλάμε για **συντονισμό**, και το πλάτος της ταλάντωσης **μπορεί να φτάσει τεράστιες τιμές**.

14-8 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση και Συντονισμός



Το **εύρος** της κορυφής του συντονισμού εξαρτάται από την απόσβεση. Εάν η **απόσβεση είναι μικρή** (A) έχουνε στενές κορυφές ενώ όταν η απόσβεση είναι **μεγάλη** (B) η κορυφή είναι πιο πλατιά.

Η λειτουργία ορισμένων συστημάτων βασίζεται στον συντονισμό όπως **Μουσικά όργανα και** ραδιόφωνα και τηλεοράσεις (μη καλωδιακές).

14-8 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση και Συντονισμός

Η Εξίσωση κίνησης είναι:

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos \omega t.$$

και η λύση της: $$x = A_0 \sin(\omega t + \phi_0),$$

όπου $$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}}$$

και

$$\phi_0 = \tan^{-1} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega(b/m)}.$$

14-8 Εξαναγκασμένη Ταλάντωση και Συντονισμός

Το εύρος της κορυφής συντονισμού χαρακτηρίζεται από τον παράγοντα Q :

$$Q = \frac{m\omega_0}{b}.$$