# Κεφάλαιο 11

# Στροφορμή

# Περιεχόμενα Κεφαλαίου 11

- Στροφορμή—Περιστροφή Αντικειμένων πέριξ σταθερού άξονα
- Το Εξωτερικό γινόμενο-Η ροπή ως διάνυσμα
- Στροφορμή Σωματιδίου
- Στροφορμή και Ροπή για Σύστημα Σωματιδίων
- Στροφορμή και Ροπή Συμπαγούς Σώματος
- Διατήρηση Στροφορμής
- Το φαινόμενο Coriolis
- Περιστρεφόμενα συτήματα αναφοράς

# 11-1 Περιστροφή πέριξ σταθερού άξονα

Η ανάλογη περιστροφική ποσότητα με την γραμμική ορμή είναι η στροφορμή, $L$:

$$L = I\omega.$$

Ενώ ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση γίνεται:

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει μόνο όταν η ροπή αδράνειας $I$ είναι σταθερή.

**Όταν στο σύστημα δεν δρα εξωτερική ροπή, τότε η συνολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:**

$$\frac{dL}{dt} = 0 \text{ and } L = I\omega = \text{constant.}$$

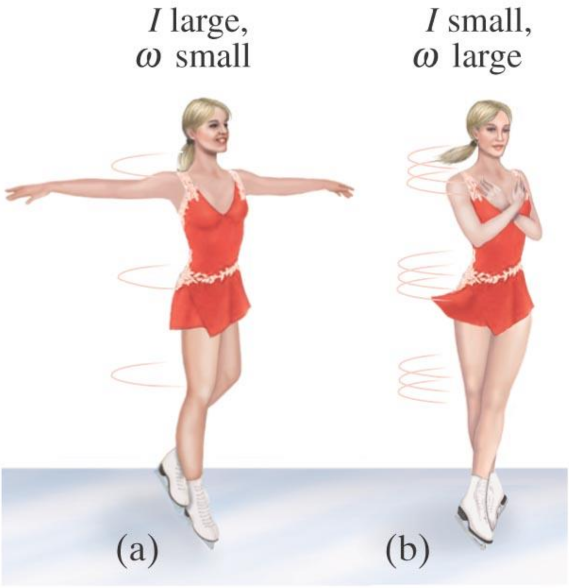
**Η διαφορετικά,**

***η στροφορμή ενός συστήματος παραμένει σταθερή εφόσον η συνολική εξωτερική ροπή που ασκείται πάνω του είναι μηδέν.***

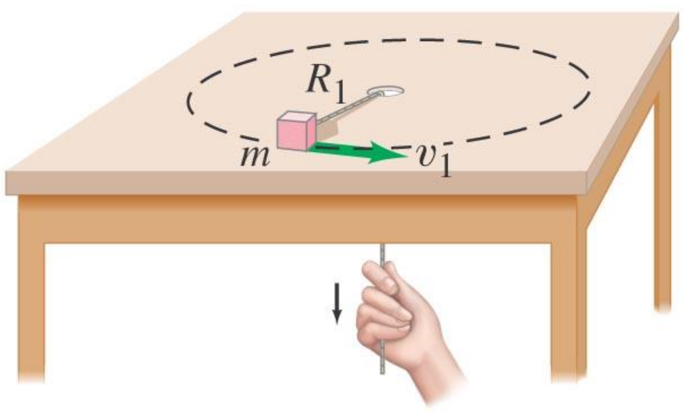
# Αυτό σημαίνει:

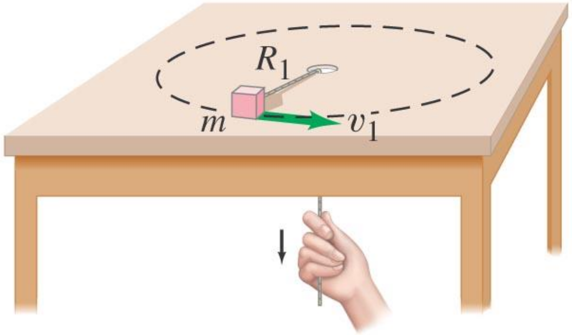
$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{constant.}$$

Αυτό σημαίνει ότι εάν κατά την διάρκεια της περιστροφής έχουμε μεταβολή στην ροπή αδράνειας, τότε αναγκαστικά θα αλλάξει η γωνιακή ταχύτητα




**Μια μικρή μάζα $m$ που συγκρατιέται από ένα σκοινί, περιστρέφεται κυκλικά πάνω σε ένα τραπέζι χωρίς τριβές, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά η μάζα περιστρέφεται με τάχο $v_1$ = 2.4 m/s με ακτίνα $R_1$ = 0.80 m. Στη συνέχεια το σκοινί μετατοπίζεται κατακόρυφα προς τα κάτω ώστε η ακτίνα περιστροφής να μικρύνει σε $R_2$ = 0.48 m. Πόση είναι ο νέος τάχος $v_2$;**






**APPROACH** There is no net torque on the mass $m$ because the force exerted by the string to keep it moving in a circle is exerted toward the axis; hence the lever arm is zero. We can thus apply conservation of angular momentum.

**SOLUTION** Conservation of angular momentum gives

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

Our small mass is essentially a particle whose moment of inertia about the hole is $I = mR^2$ (Eq. 10–11), so we have

$$mR_1^2\omega_1 = mR_2^2\omega_2,$$

or

$$\omega_2 = \omega_1\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right).$$

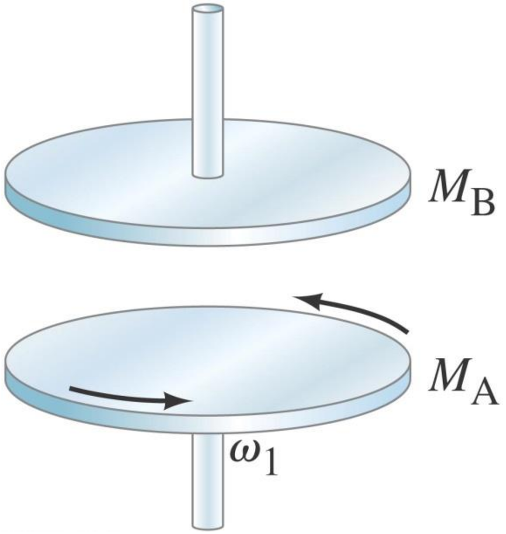
Then, since $v = R\omega$, we can write

$$v_2 = R_2\omega_2 = R_2\omega_1\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = R_2\frac{v_1}{R_1}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = v_1\frac{R_1}{R_2}$$

$$= (2.4\ \mathrm{m/s})\left(\frac{0.80\ \mathrm{m}}{0.48\ \mathrm{m}}\right) = 4.0\ \mathrm{m/s}.$$

The speed increases as the radius decreases.

Ένα απλό σύστημα συμπλέκτη (ντεμπραγιάζ) αποτελείται από δύο δίσκους που μπορούν να πιεστούν μεταξύ τους. Οι μάζες των δύο δίσκων είναι $M_A$ = 6.0 kg και $M_B$ = 9.0 kg, με ίσες ακτίνες $R_0$ = 0.60 m. Αρχικά οι δίσκοι είναι διαχωρισμένοι. Ο δίσκος $M_A$ επιταχύνεται από στάση σε γωνιακή ταχύτητα $\omega_1$ = 7.2 rad/s σε χρόνο $\Delta t$ = 2.0 s. Υπολογίστε (α)την στροφορμή του $M_A$, και (β)την ροπή ου απαιτείται για την επιτάχυνση του $M_A$ σε $\omega_1$. (γ) Στη συνέχεια ο δίσκος $M_B$, αρχικά στάσιμο αλλά έχοντας την ελευθερία της περιστροφικής κίνησης πιέζεται πάνω στο δίσκο $M_A$, και οι δύο δίσκοι τώρα περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_2$, σημαντικά μικρότερη από την $\omega_1$. Γιατί συμβαίνει αυτό και πόση είναι η $\omega_2$;



**EXAMPLE 11–2** **Clutch.** A simple clutch consists of two cylindrical plates that can be pressed together to connect two sections of an axle, as needed, in a piece of machinery. The two plates have masses $M_A = 6.0\,\mathrm{kg}$ and $M_B = 9.0\,\mathrm{kg}$, with equal radii $R_0 = 0.60\,\mathrm{m}$. They are initially separated (Fig. 11–4). Plate $M_A$ is accelerated from rest to an angular velocity $\omega_1 = 7.2\,\mathrm{rad/s}$ in time $\Delta t = 2.0\,\mathrm{s}$. Calculate (*a*) the angular momentum of $M_A$, and (*b*) the torque required to have accelerated $M_A$ from rest to $\omega_1$. (*c*) Next, plate $M_B$, initially at rest but free to rotate without friction, is placed in firm contact with freely rotating plate $M_A$, and the two plates both rotate at a constant angular velocity $\omega_2$, which is considerably less than $\omega_1$. Why does this happen, and what is $\omega_2$?

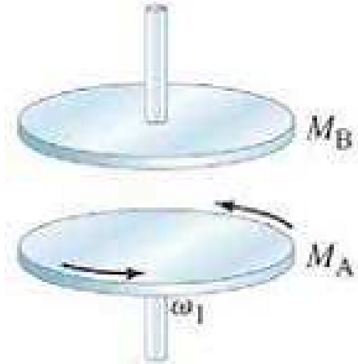



**FIGURE 11–4** Example 11–2.

**APPROACH** We use the definition of angular momentum $L = I\omega$ (Eq. 11–1) plus Newton's second law for rotation, Eq. 11–2.

**SOLUTION** (*a*) The angular momentum of $M_A$ will be

$$L_A = I_A\omega_1 = \tfrac{1}{2}M_A R_0^2\omega_1 = \tfrac{1}{2}(6.0\,\mathrm{kg})(0.60\,\mathrm{m})^2(7.2\,\mathrm{rad/s}) = 7.8\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}.$$

(*b*) The plate started from rest so the torque, assumed constant, was

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{7.8\,\mathrm{kg\cdot m^2/s} - 0}{2.0\,\mathrm{s}} = 3.9\,\mathrm{m\cdot N}.$$

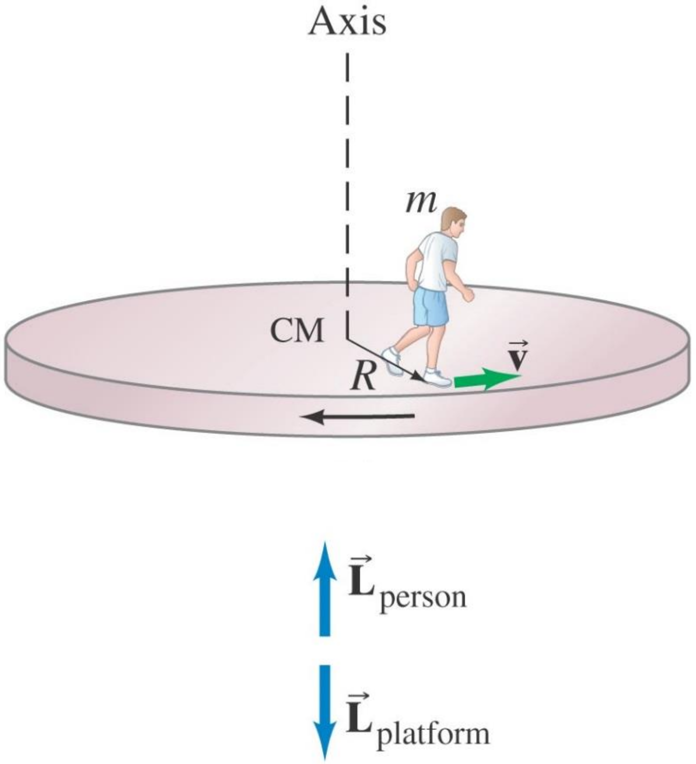
(*c*) Initially, $M_A$ is rotating at constant $\omega_1$ (we ignore friction). When plate B comes in contact, why is their joint rotation speed less? You might think in terms of the torque each exerts on the other upon contact. But quantitatively, it's easier to use conservation of angular momentum, since no external torques are assumed to act. Thus

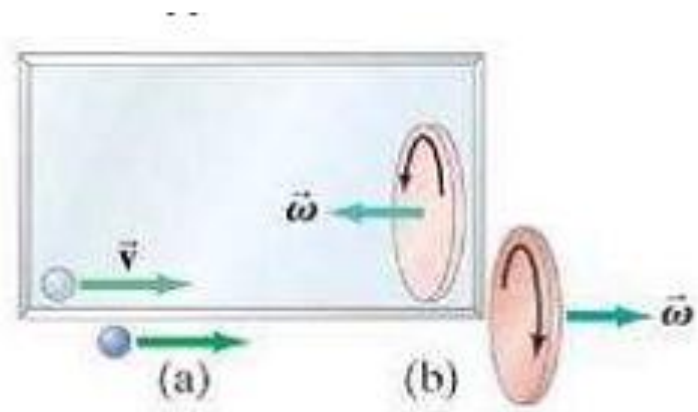
$$\text{angular momentum before} = \text{angular momentum after}$$
$$I_A\omega_1 = (I_A + I_B)\omega_2.$$

Solving for $\omega_2$ we find

$$\omega_2 = \left(\frac{I_A}{I_A + I_B}\right)\omega_1 = \left(\frac{M_A}{M_A + M_B}\right)\omega_1 = \left(\frac{6.0\,\mathrm{kg}}{15.0\,\mathrm{kg}}\right)(7.2\,\mathrm{rad/s}) = 2.9\,\mathrm{rad/s}.$$

**Η Στροφορμή είναι «διάνυσμα». Για συμμετρικά αντικείμενα που περιστρέφονται γύρω από άξονα συμμετρίας η διεύθυνση της στροφορμής είναι ίδια με αυτήν της γωνιακής ταχύτητας**




**«ψευτοδιάνυσμα»**
**Το ίδιο συμβαίνει με όλα τα διανύσματα που προκύπτουν από εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων**

**Υποθέτουμε ότι ένας φοιτητής 60-kg στέκεται στην άκρη μιας κυκλικής πλατφόρμας με ακτίνα 6.0-m-προσαρμοσμένη σε ρουλεμάν με μηδενική τριβή και ροπή αδράνειας 1800 kg·m$^2$. Η πλατφόρμα είναι αρχικά ακίνητη και ο φοιτητής αρχίζει να τρέχει με σπουδή 4.2 m/s (ως προς τη Γη) κατά μήκος της περιφέρειας της πλατφόρμας. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας**

**APPROACH** We use conservation of angular momentum. The total angular momentum is zero initially. Since there is no net torque, $\vec{\mathbf{L}}$ is conserved and will remain zero, as in Fig. 11–5. The person's angular momentum is $L_{\text{per}} = (mR^2)(v/R)$, and we take this as positive. The angular momentum of the platform is $L_{\text{plat}} = -I\omega$.

**SOLUTION** Conservation of angular momentum gives

$$L = L_{\text{per}} + L_{\text{plat}}$$

$$0 = mR^2\left(\frac{v}{R}\right) - I\omega.$$

So

$$\omega = \frac{mRv}{I} = \frac{(60\,\text{kg})(3.0\,\text{m})(4.2\,\text{m/s})}{1800\,\text{kg}\cdot\text{m}^2} = 0.42\,\text{rad/s}.$$

**NOTE** The frequency of rotation is $f = \omega/2\pi = 0.067\,\text{rev/s}$ and the period $T = 1/f = 15\,\text{s}$ per revolution.

Εάν υποθέσουμε ότι κρατάω ένα τροχό ποδηλάτου που περιστρέφεται και στέκομαι πάνω σε πλατφόρμα που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβή. Τι θα συμβεί εάν ξαφνικά αντιστρέψω την φορά περιστροφής του τροχού;

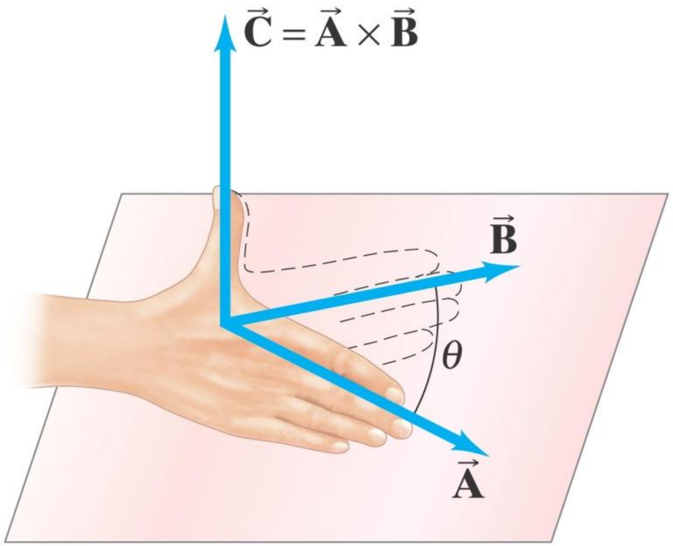

**RESPONSE** We consider the system of turntable, teacher, and bicycle wheel. The total angular momentum initially is $\vec{\mathbf{L}}$ vertically upward. That is also what the system's angular momentum must be afterward, since $\vec{\mathbf{L}}$ is conserved when there is no net torque. Thus, if the wheel's angular momentum after being flipped over is $-\vec{\mathbf{L}}$ downward, then the angular momentum of teacher plus turntable will have to be $+2\vec{\mathbf{L}}$ upward. We can safely predict that the teacher will begin spinning around in the same direction the wheel was spinning originally.

# 11-2 Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Ορίζουμε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ως:

$$C = |\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = AB \sin\theta.$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος που προκύπτει προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιάς παλάμης :



## Εναλλακτικός ορισμός για το εξωτερικό γινόμενο είναι:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{\mathbf{k}}.$$

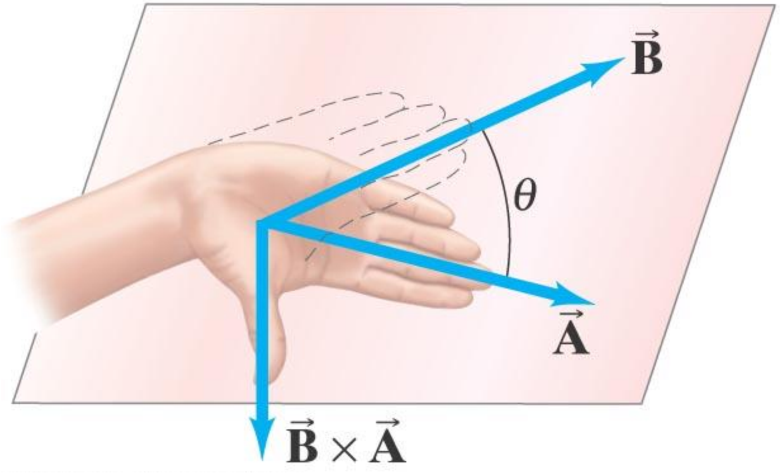
# Ορισμένες ιδιότητες:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

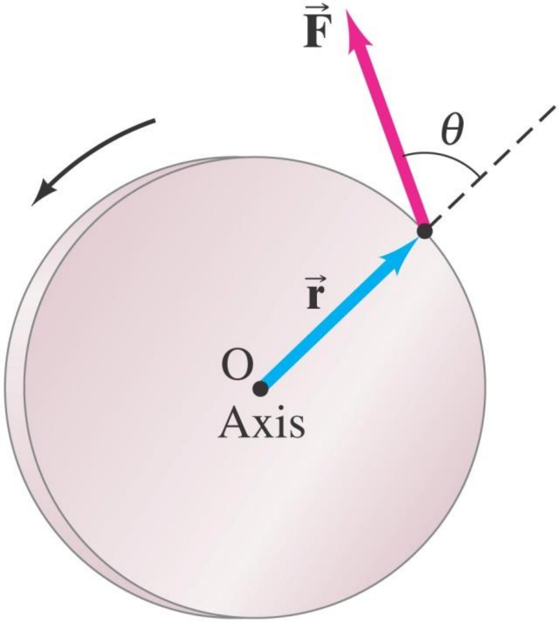
$$\vec{\mathbf{A}} \times \left(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}\right) = \left(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right) + \left(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}\right)$$

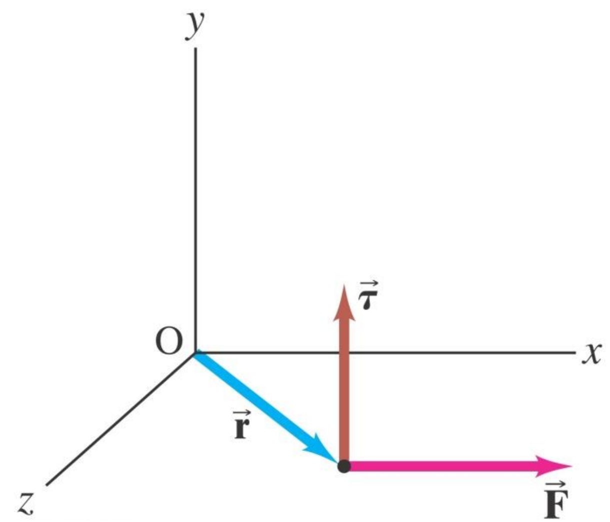
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}.$$



## Η Ροπή μπορεί να οριστεί ως το εξωτερικό γινόμενο της μετατόπισης του σημείου με την δύναμη:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}.$$



# Το διάνυσμα της Ροπής

**Υποθέστε το διάνυσμα $\vec{r}$ βρίσκεται στο επίπεδο $xz$, και $\vec{r} = 1.2m\,\hat{\imath} + 1.2m\,\hat{k}$. Βρείτε το διάνυσμα της ροπής $\vec{\tau}$ εάν $\vec{F} = 150N\,\hat{\imath}$.**

**APPROACH** We use the determinant form, Eq. 11–3b.

**SOLUTION**
$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1.2\,\mathrm{m} & 0 & 1.2\,\mathrm{m} \\ 150\,\mathrm{N} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{\mathbf{i}} + (180\,\mathrm{m\cdot N})\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}.$$

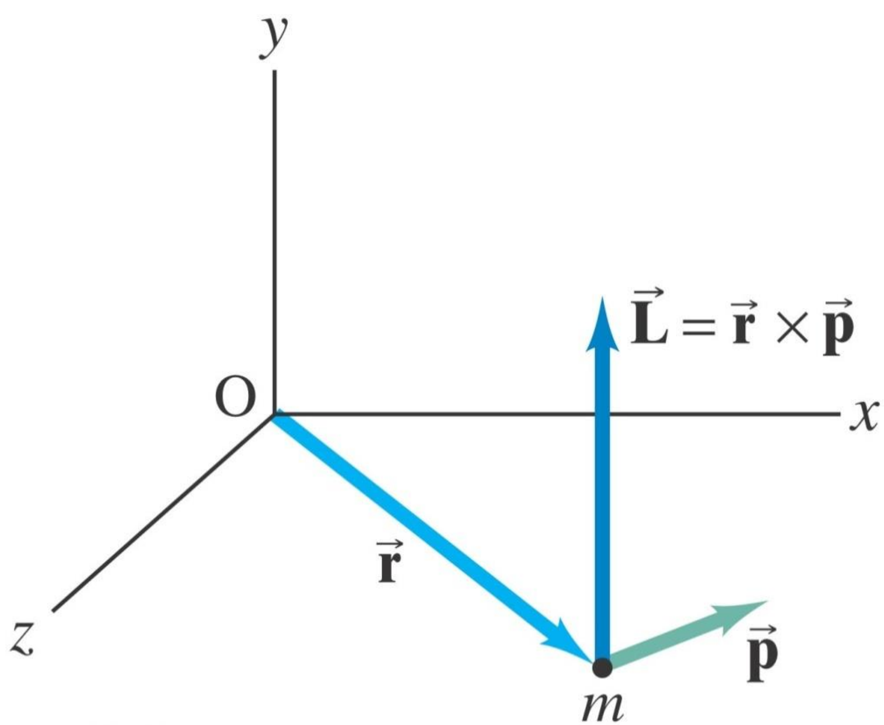
So $\tau$ has magnitude $180\,\mathrm{m\cdot N}$ and points along the positive $y$ axis.

**EXERCISE E** If $\vec{\mathbf{F}} = 5.0\,\mathrm{N}\,\hat{\mathbf{i}}$ and $\vec{\mathbf{r}} = 2.0\,\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{j}}$, what is $\vec{\boldsymbol{\tau}}$? (*a*) 10 mN, (*b*) −10 mN, (*c*) 10 mN $\hat{\mathbf{k}}$, (*d*) −10 mN $\hat{\mathbf{j}}$, (*e*) −10 mN $\hat{\mathbf{k}}$.

# 11-3 Στροφορμή σωματιδίου

**Η στροφορμή ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση:**

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}.$$



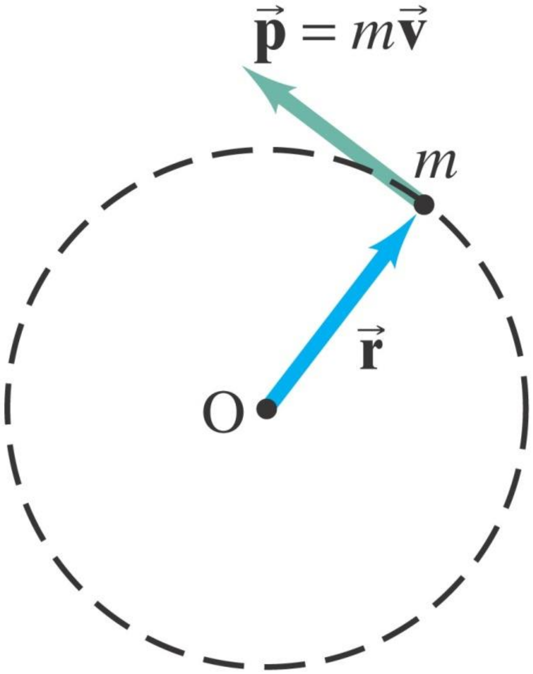
Παίρνοντας την παράγωγο του $\vec{L}$ βρίσκουμε:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$

Επειδή $\vec{\mathbf{r}} \times \Sigma\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt},$

Βρίσκουμε: $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}.$

**Βρείτε την στροφορμή ενός σωματιδίου μάζας $m$ που κινείται με ταχύτητα $v$ κυκλικά με ακτίνα $r$ και φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού.**




**RESPONSE** The value of the angular momentum depends on the choice of the point O. Let us calculate $\vec{\mathbf{L}}$ with respect to the center of the circle, Fig. 11–13. Then $\vec{\mathbf{r}}$ is perpendicular to $\vec{\mathbf{p}}$ so $L = |\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}| = rmv$. By the right-hand rule, the direction of $\vec{\mathbf{L}}$ is perpendicular to the plane of the circle, outward toward the viewer. Since $v = \omega r$ and $I = mr^2$ for a single particle rotating about an axis a distance $r$ away, we can write

$$L = mvr = mr^2\omega = I\omega.$$

# 11-4 Στροφορμή Συστήματος Σωματιδίων-Γενική Κίνηση

**Η στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων δύναται να μεταβληθεί μόνο εάν υπάρχει εξωτερική ροπή-** ***οι ροπές εξ αιτίας εσωτερικών δυνάμεων αναιρούνται μεταξύ τους.***

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} .$$

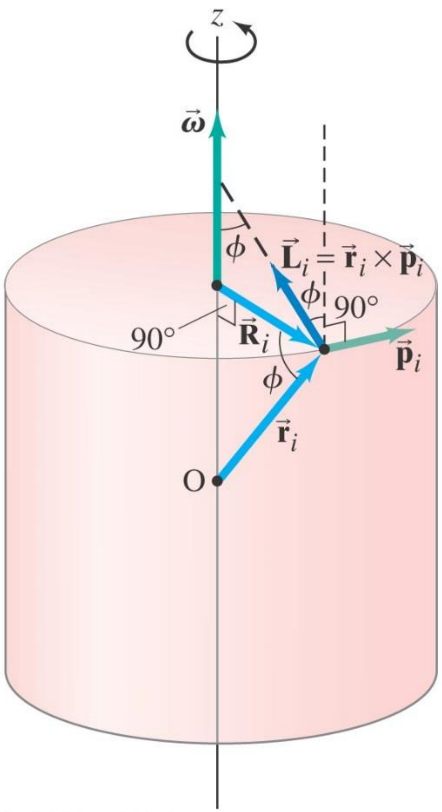
**Η σχέση αυτή ισχύει για οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα. Ισχύει ακόμη και για το Κέντρο Μάζας ακόμα και αν αυτό επιταχύνεται.**

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{CM}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{CM}} .$$

# 11-5 Στροφορμή και Ροπή για στερεό Σώμα

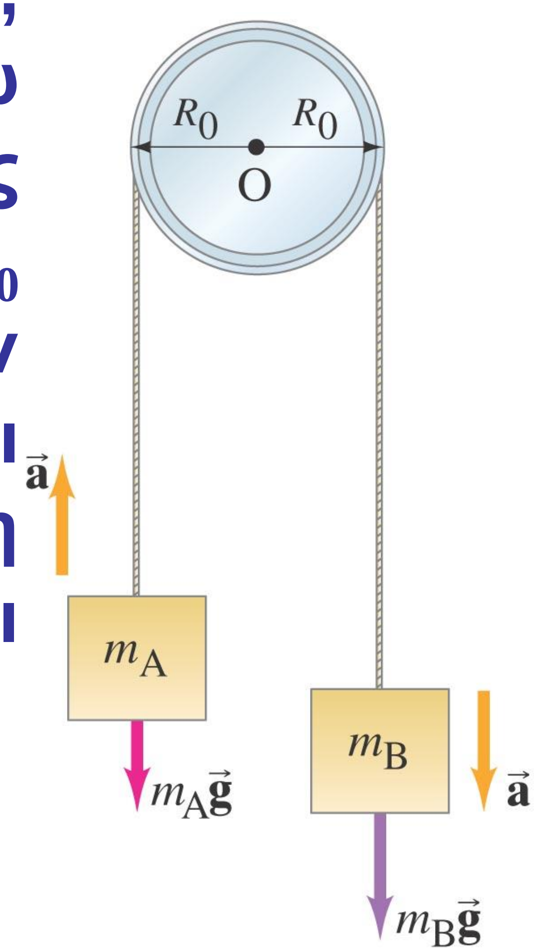
**Για ένα στερεό σώμα αποδεικνύεται ότι η στροφορμή του δίδεται από τη σχέση:**

$$L_\omega = I\omega.$$



# Η μηχανή του Atwood

Όπως έχουμε ξαναδεί η μηχανή του η Atwood αποτελείται από δύο μάζες, $m_A$ και $m_B$, που συνδέονται μέσω τροχαλίας με ένα ιμάντα αμελητέας μάζας. Εάν η τροχαλία έχει ακτίνα $R_0$ και ροπή αδράνειας $I$, Βρείτε την επιτάχυνση των μαζών $m_A$ και $m_B$, και συγκρίνατε με την περίπτωση όπου η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι μηδέν.



**APPROACH** We first determine the angular momentum of the system, and then apply Newton's second law, $\tau = dL/dt$.

**SOLUTION** The angular momentum is calculated about an axis along the axle through the center O of the pulley. The pulley has angular momentum $I\omega$, where $\omega = v/R_0$ and $v$ is the velocity of $m_A$ and $m_B$ at any instant. The angular momentum of $m_A$ is $R_0 m_A v$ and that of $m_B$ is $R_0 m_B v$. The total angular momentum is

$$L = (m_A + m_B)vR_0 + I\frac{v}{R_0}.$$

The external torque on the system, calculated about the axis O (taking clockwise as positive), is

$$\tau = m_B gR_0 - m_A gR_0.$$

(The force on the pulley exerted by the support on its axle gives rise to no torque because the lever arm is zero.) We apply Eq. 11–9a:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

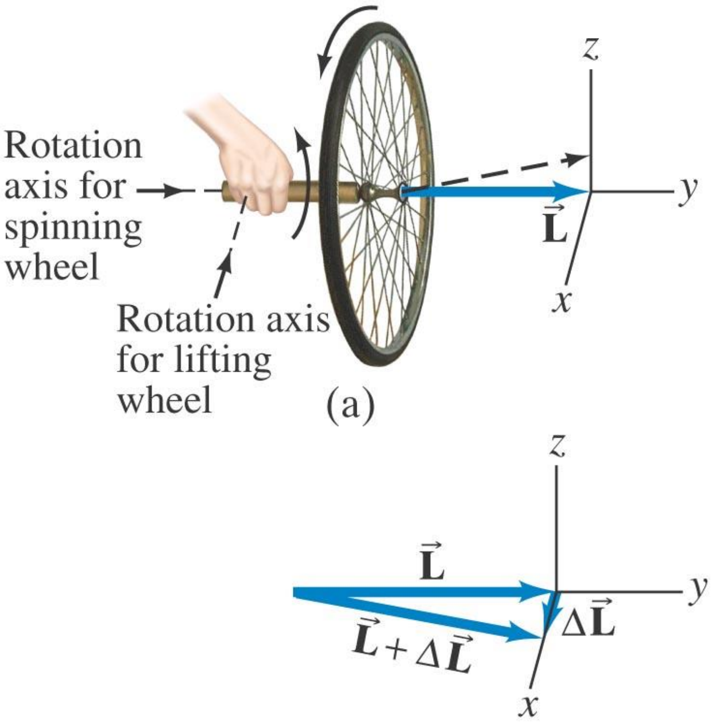
$$(m_B - m_A)gR_0 = (m_A + m_B)R_0\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R_0}\frac{dv}{dt}.$$

Solving for $a = dv/dt$, we get

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(m_B - m_A)g}{(m_A + m_B) + I/R_0^2}.$$

If we were to ignore $I$, $a = (m_B - m_A)g/(m_B + m_A)$ and we see that the effect of the moment of inertia of the pulley is to slow down the system. This is just what we would expect.

**Κρατάμε το τροχό ενός ποδηλάτου από τον άξονα του όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο τροχός περιστρέφεται γρήγορα . Εάν επιχειρήσουμε να ανυψώσουμε το τροφό κατακόρυφα προς τα πάνω (έτσι ώστε το ΚΜ να μετατοπιστεί κατακόρυφα) παρατηρούμε ότι ο τροχός «θέλει» να κινηθεί προς τα δεξιά. Γιατί;**

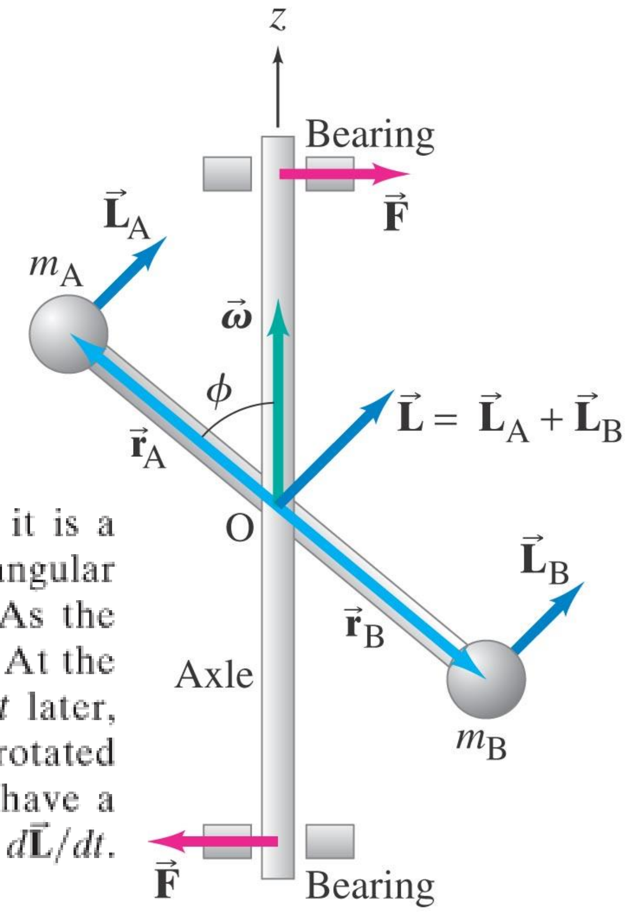



**RESPONSE** To explain this seemingly odd behavior—you may need to do it to believe it—we only need to use the relation $\vec{\tau}_{\text{net}} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$. In the short time $\Delta t$, you exert a net torque (about an axis through your wrist) that points along the $x$ axis perpendicular to $\vec{\mathbf{L}}$. Thus the change in $\vec{\mathbf{L}}$ is

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} \approx \vec{\tau}_{\text{net}}\,\Delta t;$$

so $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ must also point (approximately) along the $x$ axis, since $\vec{\tau}_{\text{net}}$ does (Fig. 11–17b). Thus the new angular momentum, $\vec{\mathbf{L}} + \Delta\vec{\mathbf{L}}$, points to the right, looking along the axis of the wheel, as shown in Fig. 11–17b. Since the angular momentum is directed along the axle of the wheel, we see that the axle, which now is along $\vec{\mathbf{L}} + \Delta\vec{\mathbf{L}}$, must move sideways to the right, which is what we observe.

**Σε ένα σύστημα που δεν είναι «ζυγοσταθμισμένο» η στροφορμή και η γωνιακή ταχύτητα δεν είναι ευθυγραμμισμένες και απαιτείται ροπή για να συνεχίσει ένα τέτοιο σύστημα να περιστρέφεται.**

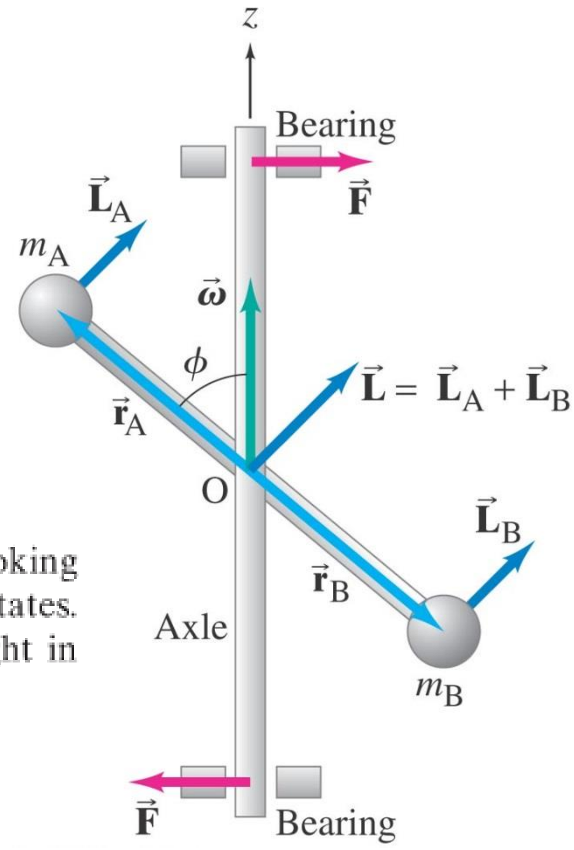



Let us go one step further with the system shown in Fig. 11–18, since it is a fine illustration of $\Sigma\vec{\tau} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$. If the system rotates with constant angular velocity, $\omega$, the magnitude of $\vec{\mathbf{L}}$ will not change, but its direction will. As the rod and two masses rotate about the $z$ axis, $\vec{\mathbf{L}}$ also rotates about the axis. At the moment shown in Fig. 11–18, $\vec{\mathbf{L}}$ is in the plane of the paper. A time $dt$ later, when the rod has rotated through an angle $d\theta = \omega\, dt$, $\vec{\mathbf{L}}$ will also have rotated through an angle $d\theta$ (it remains perpendicular to the rod). $\vec{\mathbf{L}}$ will then have a component pointing into the page. Thus $d\vec{\mathbf{L}}$ points into the page and so must $d\vec{\mathbf{L}}/dt$. Because

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt},$$

we see that a net torque, directed into the page at the moment shown, must be applied to the axle on which the rod is mounted. The torque is supplied by bearings (or other constraint) at the ends of the axle. The forces $\vec{\mathbf{F}}$ exerted by the bearings on the axle are shown in Fig. 11–18. The direction of each force $\vec{\mathbf{F}}$ rotates as the system does, always being in the plane of $\vec{\mathbf{L}}$ and $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ for this system. If the torque due to these forces were not present, the system would not rotate about the fixed axis as desired.

# Βρείτε το μέγεθος της ροπής $\tau_{net}$ που απαιτείται για να συνεχίσει να περιστρέφεται το σύστημα.




**APPROACH** Figure 11–20 is a view of the angular momentum vector, looking down the rotation axis ($z$ axis) of the object depicted in Fig. 11–18, as it rotates. $L\cos\phi$ is the component of $\vec{L}$ perpendicular to the axle (points to the right in Fig. 11–18). We find $dL$ from Fig. 11–20 and use $\tau_{net} = dL/dt$.

**SOLUTION** In a time $dt$, $\vec{L}$ changes by an amount (Fig. 11–20 and Eq. 10–2b)

$$dL = (L\cos\phi)\,d\theta = L\cos\phi\,\omega\,dt,$$

where $\omega = d\theta/dt$. Hence

$$\tau_{net} = \frac{dL}{dt} = \omega L\cos\phi.$$

Now $L = L_A + L_B = r_A m_A v_A + r_B m_B v_B = r_A m_A(\omega r_A \sin\phi) + r_B m_B(\omega r_B \sin\phi) = (m_A r_A^2 + m_B r_B^2)\omega\sin\phi$. Since $I = (m_A r_A^2 + m_B r_B^2)\sin^2\phi$ is the moment of inertia about the axis of rotation, then $L = I\omega/\sin\phi$. So

$$\tau_{net} = \omega L\cos\phi = (m_A r_A^2 + m_B r_B^2)\omega^2\sin\phi\cos\phi = I\omega^2/\tan\phi.$$


**FIGURE 11–20** Angular momentum vector looking down along the rotation axis of the system of Fig. 11–18 as it rotates during a time $dt$.

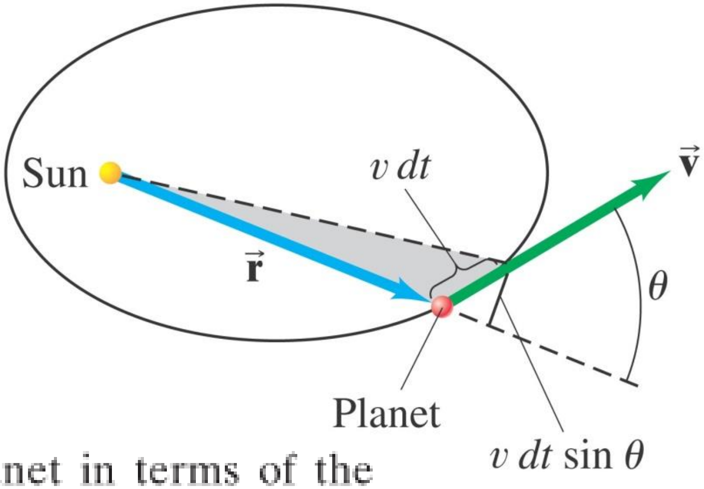
# 11-6 Διατήρηση της Στροφορμής

**Εάν η ροπή σε ένα σύστημα είναι σταθερή τότε,**

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0 \quad \text{and} \quad \vec{\mathbf{L}} = \text{constant.} \qquad \left[\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = 0\right]$$

***Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος παραμένει σταθερή εφόσον η συνολική εξωτερική ροπή που δρα στο σύστημα είναι μηδέν.***

**Ο δεύτερος Νόμος του Kepler λέει ότι ένας πλανήτης κινείται έτσι ώστε η απόστασή του από τον Ήλιο διαγράφει ίσες επιφάνειες σε ίσους χρόνου.**




**APPROACH** We determine the angular momentum of a planet in terms of the area swept out with the help of Fig. 11–21.

**SOLUTION** The planet moves in an ellipse as shown in Fig. 11–21. In a time $dt$, the planet moves a distance $v\,dt$ and sweeps out an area $dA$ equal to the area of a triangle of base $r$ and height $v\,dt\sin\theta$ (shown exaggerated in Fig. 11–21). Hence

$$dA = \tfrac{1}{2}(r)(v\,dt\sin\theta)$$

and

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}rv\sin\theta.$$

The magnitude of the angular momentum $\vec{\mathbf{L}}$ about the Sun is

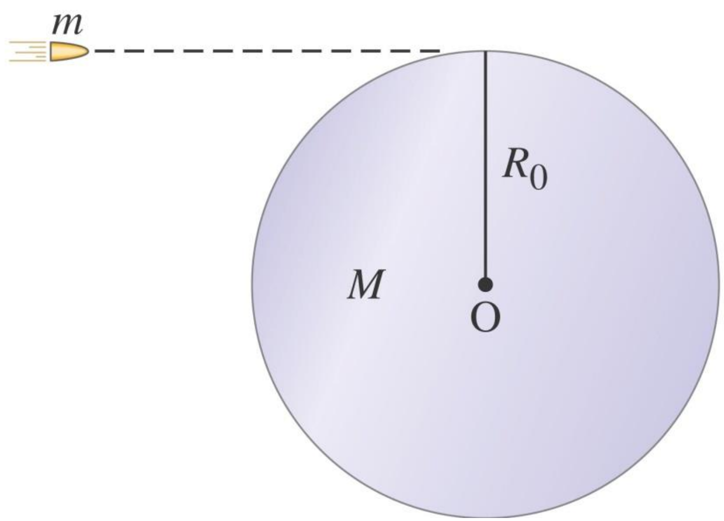
$$L = \left|\vec{\mathbf{r}}\times m\vec{\mathbf{v}}\right| = mrv\sin\theta,$$

so

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}L.$$

But $L$ = constant, since the gravitational force $\vec{\mathbf{F}}$ is directed toward the Sun so the torque it produces is zero (we ignore the pull of the other planets). Hence $dA/dt$ = constant, which is what we set out to prove.

**Μια σφαίρα (άτομο) μάζας $m$ κινείται με σπουδή $v$ και ενσωματώνεται στην περιφέρεια ενός κυλίνδρου (μορίου) μάζας $M$ και ακτίνας $R_0$. Ο κύλινδρος που είναι αρχικά ακίνητος αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του ο οποίος (ο άξονας) δεν μετακινείται. Αγνοώντας τριβές, πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου μετά την κρούση; Διατηρείται η κινητική ενέργεια;**



**APPROACH** We take as our system the bullet and cylinder, on which there is no net external torque. Thus we can use conservation of angular momentum, and we calculate all angular momenta about the center O of the cylinder.

**SOLUTION** Initially, because the cylinder is at rest, the total angular momentum about O is solely that of the bullet:

$$L = |\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}| = R_0 mv,$$

since $R_0$ is the perpendicular distance of $\vec{\mathbf{p}}$ from O. After the collision, the cylinder $\left(I_{\mathrm{cyl}} = \frac{1}{2}MR_0^2\right)$ rotates with the bullet $\left(I_{\mathrm{b}} = mR_0^2\right)$ embedded in it at angular velocity $\omega$:

$$L = I\omega = \left(I_{\mathrm{cyl}} + mR_0^2\right)\omega = \left(\tfrac{1}{2}M + m\right)R_0^2\omega.$$

Hence, because angular momentum is conserved, we find that $\omega$ is

$$\omega = \frac{L}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R_0^2} = \frac{mvR_0}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R_0^2} = \frac{mv}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R_0}.$$

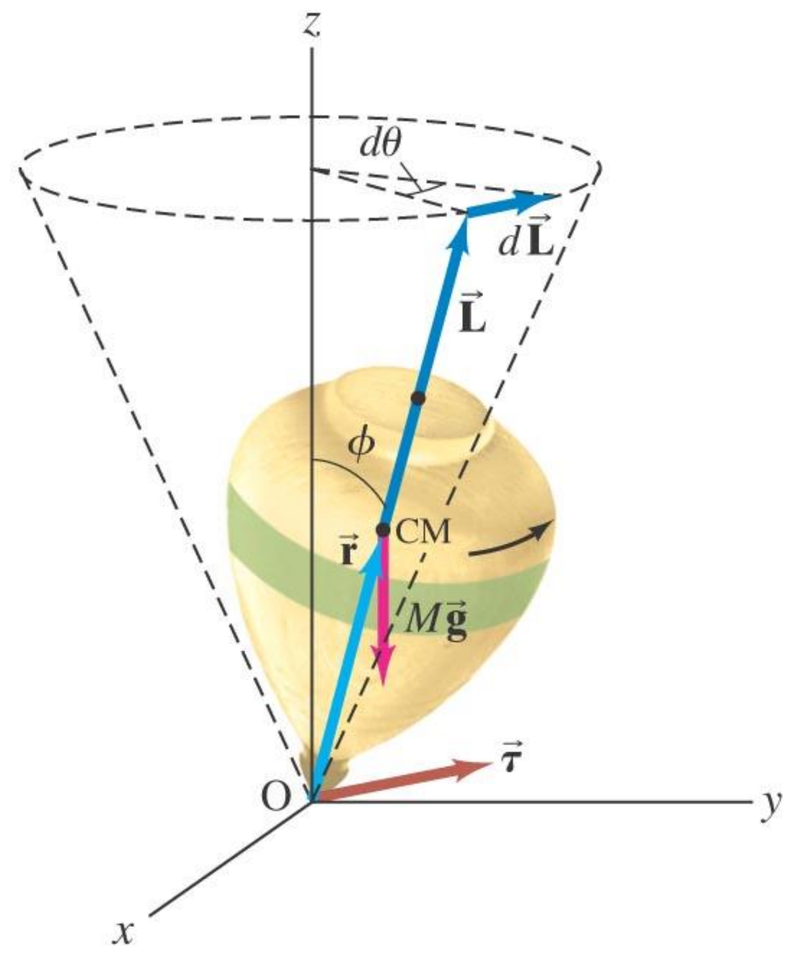
Angular momentum is conserved in this collision, but kinetic energy is not:

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{f}} - K_{\mathrm{i}} &= \tfrac{1}{2}I_{\mathrm{cyl}}\omega^2 + \tfrac{1}{2}\left(mR_0^2\right)\omega^2 - \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR_0^2\right)\omega^2 + \tfrac{1}{2}\left(mR_0^2\right)\omega^2 - \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}M + m\right)\left(\frac{mv}{\frac{1}{2}M + m}\right)^2 - \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= -\frac{mM}{2M + 4m}v^2, \end{aligned}$$

which is less than zero. Hence $K_{\mathrm{f}} < K_{\mathrm{i}}$. This energy is transformed to thermal energy as a result of the inelastic collision.

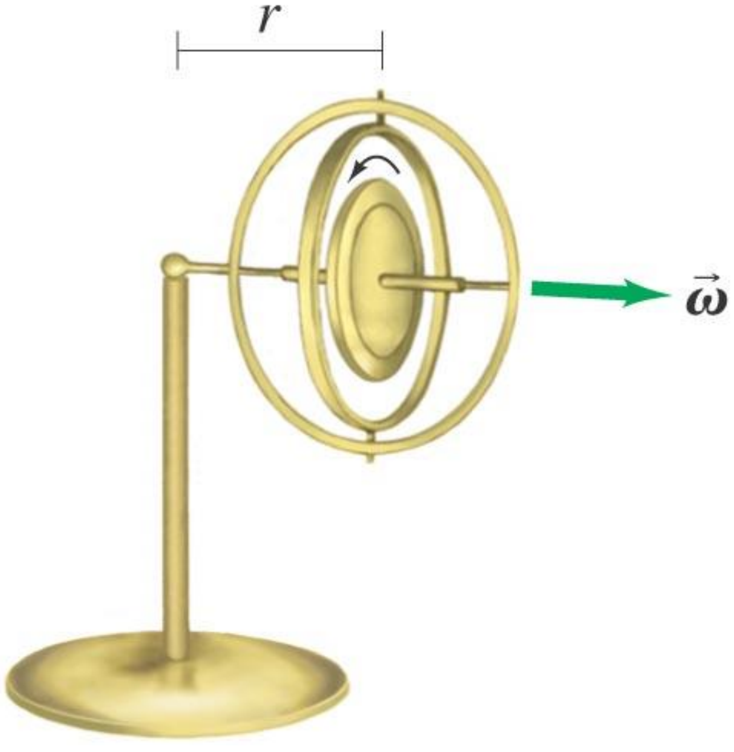
# 11-7 Σβούρες

**Ο άξονας περιστροφής μια σβούρας θα μετατοπίζεται (precess) γύρω από το σημείο επαφής της σβούρας λόγω της ροπής που δημιουργεί η βαρύτητα όταν ο άξονας της σβούρας δεν είναι κατακόρυφος.**



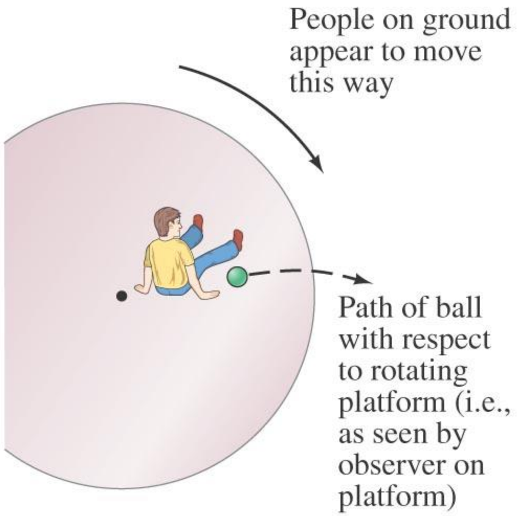
## Η γωνιακή ταχύτητα της μετατόπισης του άξονα περιστροφής (precession) είναι :

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}.$$

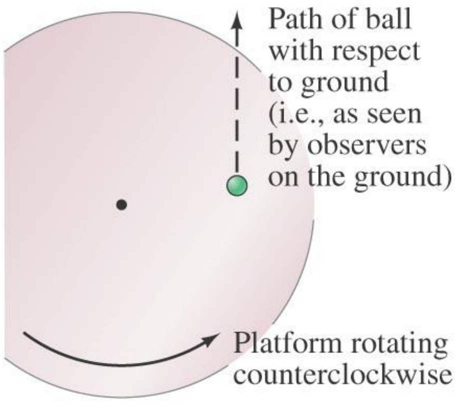


# 11-8 Περιστρεφόμενα Συστήματα Αναφοράς Δυνάμεις Αδράνειας

Ως αδρανειακό ορίσαμε ένα σύστημα όπου ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα. Ένα σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται έχει γωνιακή επιτάχυνση και επομένως ορισμένα δεν είναι «αυστηρά» αδρανειακά




Rotating reference frame

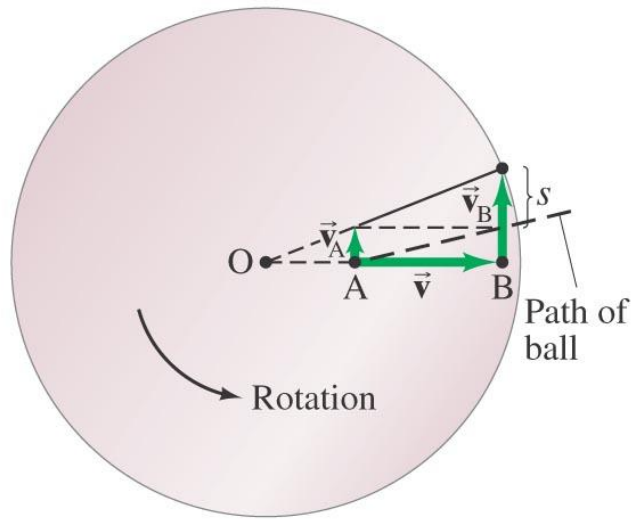



Inertial reference frame

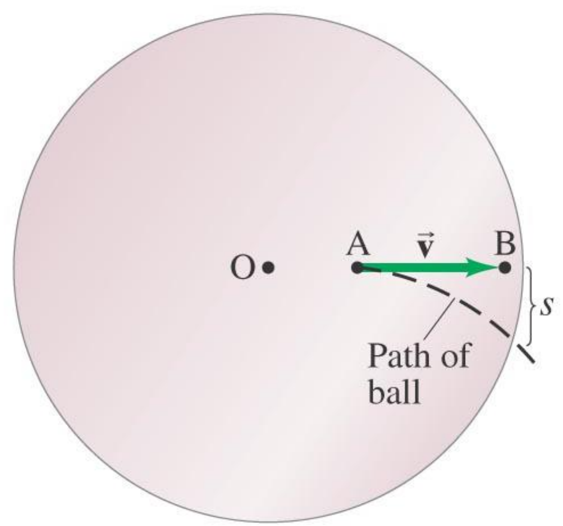
**Υπάρχει μια *φαινομενολογική δύναμη* που ασκείτε πάνω σε αντικείμενα που βρίσκονται μέσα σε ένα σύστημα που περιστρέφεται. Η «ψευτοδύναμη» αυτή, έχει φορά προς τα έξω και την ονομάζουμε φυγόκεντρος δύναμη.**

# 11-9 Το φαινόμενο Coriolis

Σε ένα αντικείμενο που κινείται σε μη αδρανειακό σύστημα, ασκείται άλλη μια «ψευτοδύναμη». Τούτο γιατί καθώς κινείται το αντικείμενο προς μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής, η γραμμική του ταχύτητά (εφαπτόμενη) δεν αυξάνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το αντικείμενο να εμφανίζει μια «πλάγια» μετατόππιση.




Inertial reference frame




Rotating reference frame

# 11-9 Το φαινόμενο Coriolis

**Το φαινόμενο Coriolis ευθύνεται για την περιστροφή των αέριων μαζών (καταιγίδες) γύρω από περιοχές χαμηλών πιέσεων—**
**Αριστερόστροφα στο Βόρειο ημισφαίριο και Δεξιόστροφα στο Νότιο.**

**Η επιτάχυνση Coriolis είναι:**

$$a_{\mathrm{Cor}} = 2\omega v.$$