Κεφάλαιο 10

Περιστροφική Κίνηση

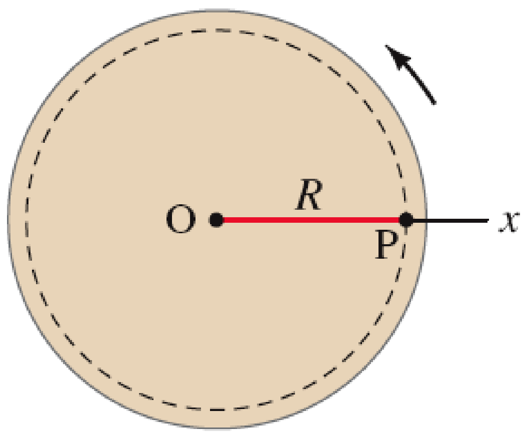
Περιεχόμενα Κεφαλαίου 10

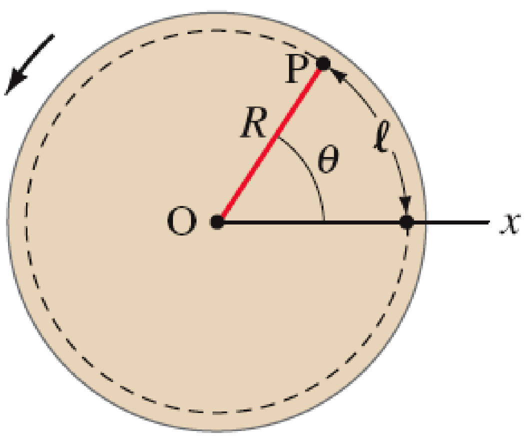
- **Γωνιακές Ποσότητες**
- **Διανυσματικός Χαρακτήρας των Γωνιακών Ποσοτήτων**
- **Σταθερή γωνιακή Επιτάχυνση**
- **Ροπή**
- **Δυναμική της Περιστροφικής Κίνησης, Ροπή και Περιστροφική Αδράνεια**
- **Επίλυση Προβλημάτων περιστροφικής Δυναμικής**

Περιεχόμενα Κεφαλαίου 10

- Προσδιορισμός ροπών Αδράνειας
- Περιστροφική Ενέργεια
- Περιστροφική και μεταφορική κίνηση. Κύλιση
- Γιατι επιβραδύνει μια Σφαίρα που κυλάει.

10-1 Γωνιακές Ποσότητες





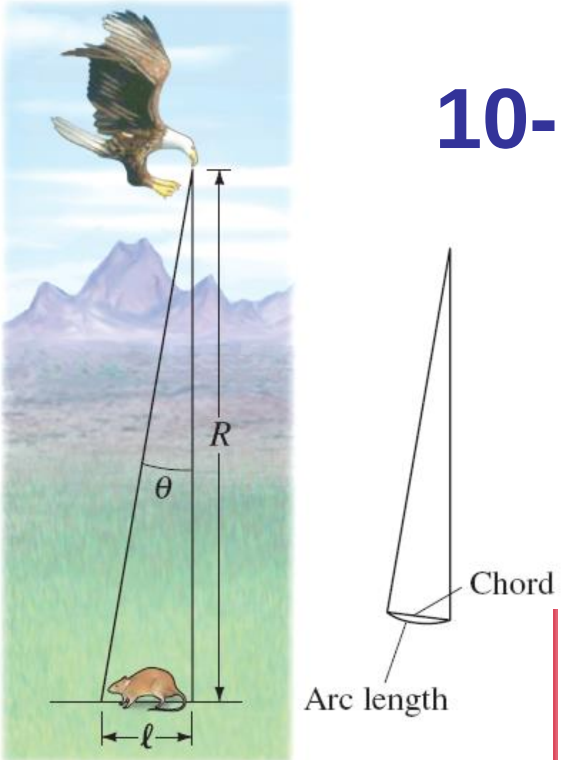
Σε μια καθαρά **περιστροφική κίνηση**, όλα τα σημεία του αντικειμένου κινούνται κυκλικά γύρω από άξονα περιστροφής ("O"). Η ακτίνα του κύκλου είναι *R*. Όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω σε ευθεία που τέμνει τον άξονα περιστροφής διαγράφουν την ίδια **γωνία** στον ίδιο **χρόνο**. Η γωνία *θ* σε **radians** (ακτίνια) ορίζεται:

$$\theta = \frac{l}{R},$$

όπου *l* το **μήκος του τόξου**.

10-1 Γωνιακές Ποσότητες

Το μάτι του γερακιού μπορεί και διακρίνει αντικείμενα τα οποία «υποτείνουν» 3 x 10^{-4} rad. (α) Σε πόσες μοίρες αντιστοιχούν (β) Από ύψος 100 m ποιο είναι το μήκος ενός θηράματος που μπορεί να διακρίνει



APPROACH For (*a*) we use the relation $360° = 2\pi$ rad. For (*b*) we use Eq. 10–1b, $\ell = R\theta$, to find the arc length.

SOLUTION (*a*) We convert 3×10^{-4} rad to degrees:

$$(3 \times 10^{-4}\,\text{rad})\left(\frac{360°}{2\pi\,\text{rad}}\right) = 0.017°,$$

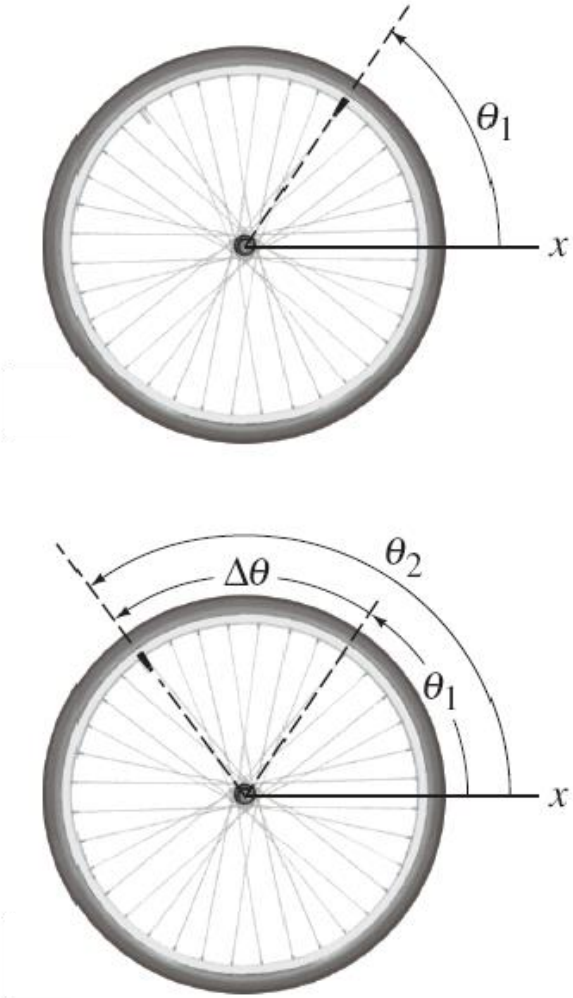
or about 0.02°.

(*b*) We use Eq. 10–1b, $\ell = R\theta$. For small angles, the arc length ℓ and the chord length are approximately the same (Fig. 10–3b). Since $R = 100$ m and $\theta = 3 \times 10^{-4}$ rad, we find

$$\ell = (100\,\text{m})(3 \times 10^{-4}\,\text{rad}) = 3 \times 10^{-2}\,\text{m} = 3\,\text{cm}.$$

A bird can distinguish a small mouse (about 3 cm long) from a height of 100 m. That is good eyesight.

NOTE Had the angle been given in degrees, we would first have had to convert it to radians to make this calculation. Equation 10–1 is valid *only* if the angle is specified in radians. Degrees (or revolutions) won't work.



Γωνιακή Μετατόπιση:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 .$$

Η **μέση γωνιακή ταχύτητα** είναι ο λόγος της γωνιακής μετατόπισης ως προς τον χρόνο:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} .$$

Στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} .$$

Η **μέση γωνιακή επιτάχυνση** είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας :

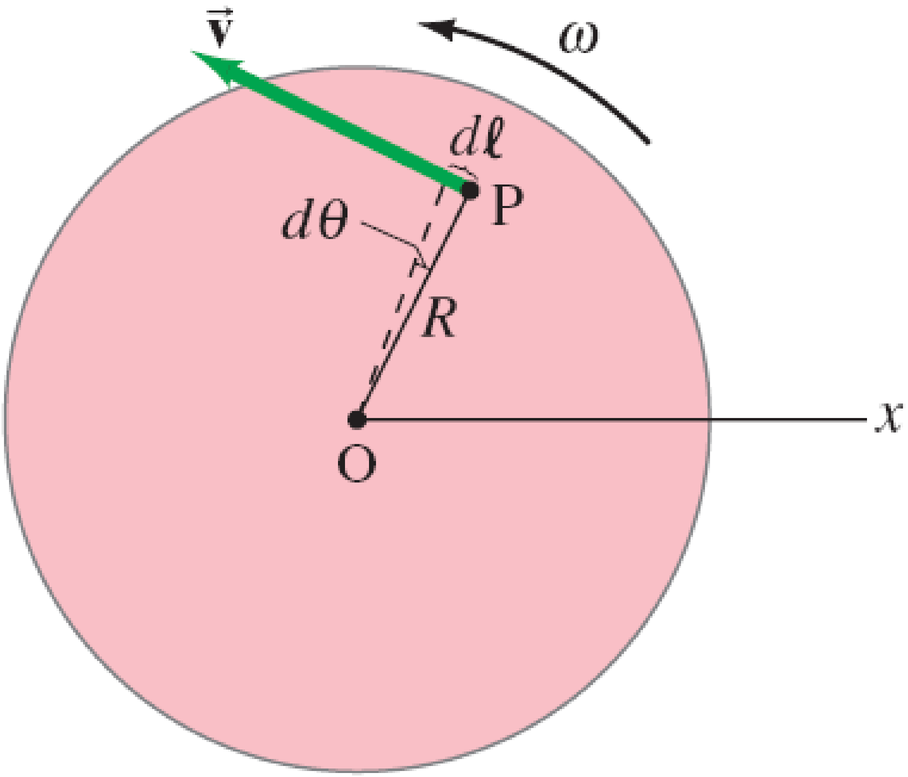
$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Και αντίστοιχα **στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση**

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

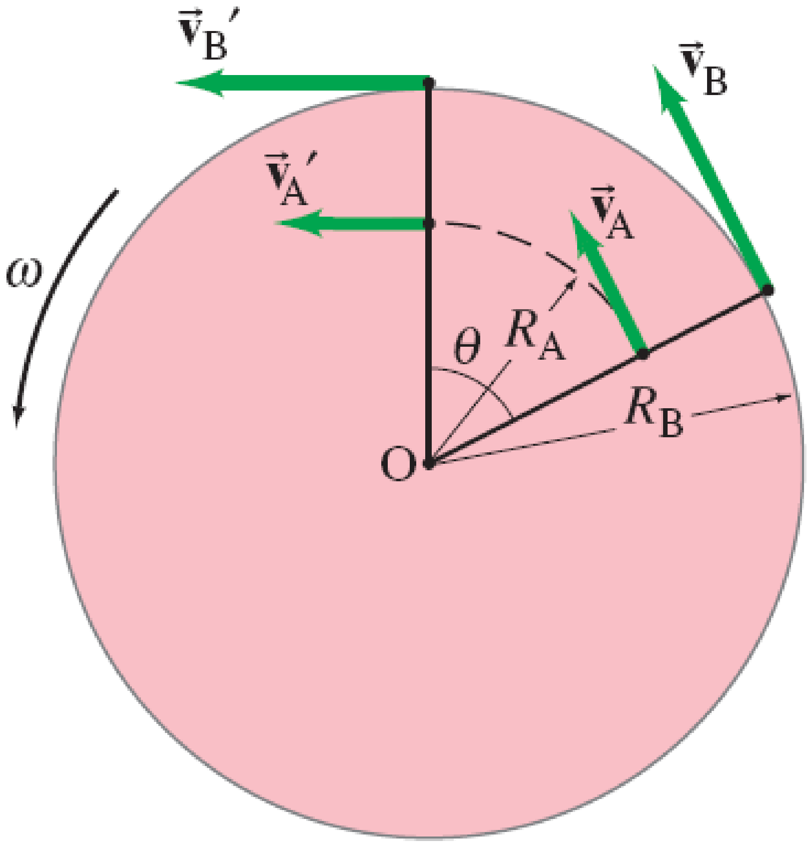
Κάθε σημείο ενός σώματος που περιστρέφεται έχει γωνιακή ταχύτητα *ω* και γραμμική ταχύτητα *υ*, *που συνδέονται με την σχέση*.

$$v = R\omega.$$

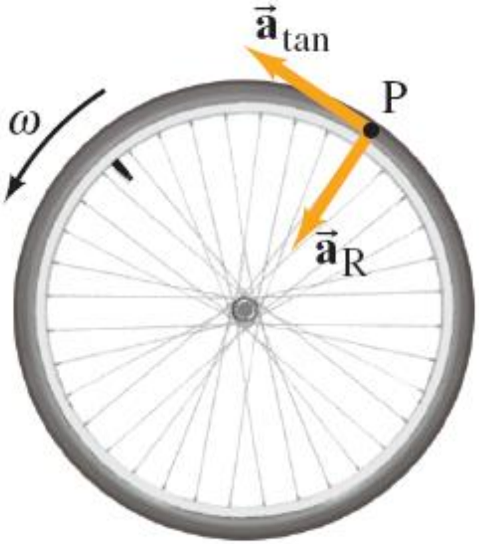


Σε ένα καρουσέλ ένα παιδάκι κάθεται σε αλογάκι σε εξωτερικό σημείο ενώ ένα άλλο σε λιοντάρι κοντά στο κέντρο περιστροφής . (α) Ποιο από τα παιδιά έχει μεγαλύτερη γραμμική ταχύτητα; (β) Ποιο έχει μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα;

RESPONSE (*a*) The *linear* velocity is the distance traveled divided by the time interval. In one rotation the child on the outer edge travels a longer distance than the child near the center, but the time interval is the same for both. Thus the child at the outer edge, on the horse, has the greater linear velocity. (*b*) The *angular* velocity is the angle of rotation divided by the time interval. In one rotation both children rotate through the same angle $(360^\circ = 2\pi \text{ rad})$. The two children have the same angular velocity.



Όσο μεγαλύτερη η απόσταση από τον άξονα περιστροφής τόσο μεγαλύτερη η γραμμική ταχύτητα



Η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται όταν υπάρχει εφαπτόμενη επιτάχυνση :

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha.$$

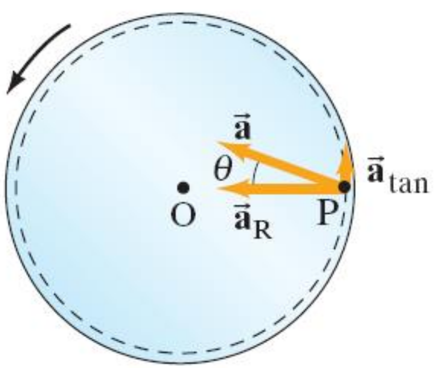
Εφόσον έχουμε περιστροφική κίνηση έχουμε αναγκαστικά ακτινική επιτάχυνση (κεντρομόλος):

$$a_R = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R.$$

Ο πίνακας δείχνει τις αντιστοιχίες μεταξύ των παραμέτρων γραμμικής και περιστροφικής κίνησης:

TABLE 10–1
Linear and Rotational Quantities

Linear	Type	Rotational	Relation (θ in radians)
x	displacement	θ	$x = R\theta$
v	velocity	ω	$v = R\omega$
$a_{\tan}$	acceleration	α	$a_{\tan} = R\alpha$



Ένα καρουσέλ αρχικά είναι ακίνητο. Την χρονική στιγμή $t = 0$ αναπτύσσει σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 0.060\ \mathrm{rad/s^2}$, και αυξάνει τη γωνιακή του ταχύτητα για 8.0 s. At $t = 8.0$ s, βρείτε τα μεγέθη για τις ποσότητες: (α) γωνιακή ταχύτητα (β) γραμμική ταχύτητα ενός παιδιού που βρίσκεται 2.5 m από το κέντρο (γ) την γραμμική επιτάχυνση (εφαπτόμενη) (δ) την κεντρομόλο επιτάχυνση και (δ) την συνολική γραμμική επιτάχυνση

APPROACH The angular acceleration α is constant, so we can use $\alpha = \Delta\omega/\Delta t$ to solve for ω after a time $t = 8.0\,\mathrm{s}$. With this ω and the given α, we determine the other quantities using the relations we just developed, Eqs. 10–4, 10–5, and 10–6.

SOLUTION (*a*) In Eq. 10–3a, $\bar{\alpha} = (\omega_2 - \omega_1)/\Delta t$, we put $\Delta t = 8.0\,\mathrm{s}$, $\bar{\alpha} = 0.060\,\mathrm{rad/s^2}$, and $\omega_1 = 0$. Solving for ω_2, we get

$$\omega_2 = \omega_1 + \bar{\alpha}\,\Delta t = 0 + (0.060\,\mathrm{rad/s^2})(8.0\,\mathrm{s}) = 0.48\,\mathrm{rad/s}.$$

During the 8.0-s interval, the carousel has accelerated from $\omega_1 = 0$ (rest) to $\omega_2 = 0.48\,\mathrm{rad/s}$.

(*b*) The linear velocity of the child, with $R = 2.5\,\mathrm{m}$ at time $t = 8.0\,\mathrm{s}$, is found using Eq. 10–4:

$$v = R\omega = (2.5\,\mathrm{m})(0.48\,\mathrm{rad/s}) = 1.2\,\mathrm{m/s}.$$

Note that the "rad" has been dropped here because it is dimensionless (and only a reminder)—it is a ratio of two distances, Eq. 10–1a.

(*c*) The child's tangential acceleration is given by Eq. 10–5:

$$a_{\tan} = R\alpha = (2.5\,\mathrm{m})(0.060\,\mathrm{rad/s^2}) = 0.15\,\mathrm{m/s^2},$$

and it is the same throughout the 8.0-s acceleration interval.

(d) The child's centripetal acceleration at $t = 8.0\,\text{s}$ is given by Eq. 10–6:

$$a_{\text{R}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(1.2\,\text{m/s})^2}{(2.5\,\text{m})} = 0.58\,\text{m/s}^2.$$

(e) The two components of linear acceleration calculated in parts (c) and (d) are perpendicular to each other. Thus the total linear acceleration at $t = 8.0\,\text{s}$ has magnitude

$$a = \sqrt{a_{\tan}^2 + a_{\text{R}}^2} = \sqrt{(0.15\,\text{m/s}^2)^2 + (0.58\,\text{m/s}^2)^2} = 0.60\,\text{m/s}^2.$$

Its direction (Fig. 10–8b) is

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_{\tan}}{a_{\text{R}}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.15\,\text{m/s}^2}{0.58\,\text{m/s}^2}\right) = 0.25\,\text{rad},$$

so $\theta \approx 15°$.

NOTE The linear acceleration at this chosen instant is mostly centripetal, keeping the child moving in a circle with the carousel. The tangential component that speeds up the motion is smaller.

Η συχνότητα είναι ο αριθμός των **περιστροφών (πλήρης)** ανά δευτερόλεπτο (s):

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Η Μονάδα συχνότητας είναι το **Hertz**:

$$1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Η **Περίοδος** είναι αντίστροφη της συχνότητας:

$$T = \frac{1}{f}.$$

Ο σκληρός δίσκος ενός υπολογιστή περιστρέφεται με 7200 rpm (rpm = revolutions per minute = rev/min). (α) Ποια είναι η γωνιακή του ταχύτητα (rad/s) ; (β) Εάν η κεφαλή ανάγνωσης βρίσκεται 3.00 cm από τον άξονα περιστροφής, πόση είναι η γραμμική ταχύτητα στο σημείο αυτό; (γ) Ένα bit απαιτεί 0.50 μm μήκος «για να γραφτεί» στην διεύθυνση της κίνησης, πόσα bits / s μπορεί να γράψει η κεφαλή στα 3.00 cm;

APPROACH We use the given frequency f to find the angular velocity ω of the platter and then the linear speed of a point on the platter ($v = R\omega$). The bit rate is found by dividing the linear speed by the length of one bit (v = distance/time).

SOLUTION (*a*) First we find the frequency in rev/s, given $f = 7200$ rev/min:

$$f = \frac{(7200\,\text{rev/min})}{(60\,\text{s/min})} = 120\,\text{rev/s} = 120\,\text{Hz}.$$

Then the angular velocity is

$$\omega = 2\pi f = 754\,\text{rad/s}.$$

(*b*) The linear speed of a point 3.00 cm out from the axis is given by Eq. 10–4:

$$v = R\omega = (3.00 \times 10^{-2}\,\text{m})(754\,\text{rad/s}) = 22.6\,\text{m/s}.$$

(*c*) Each bit requires 0.50×10^{-6} m, so at a speed of 22.6 m/s, the number of bits passing the head per second is

$$\frac{22.6\,\text{m/s}}{0.50 \times 10^{-6}\,\text{m/bit}} = 45 \times 10^{6}\ \text{bits per second},$$

or 45 megabits/s (Mbps).

Δίσκος με ακτίνα R = 3.0 m περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω = (1.6 + 1.2t) rad/s, όπου t είναι σε δευτερόλεπτα. Την στιγμή t = 2.0 s, βρείτε (α) την γωνιακή επιτάχυνση και (β) τον τάχο v και τις συνιστώσες της επιτάχυνσης a ενός σημείου στην περιφέρεια του δίσκου.

SOLUTION (*a*) The angular acceleration is

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(1.6 + 1.2\,t)\mathrm{s}^{-1} = 1.2\ \mathrm{rad/s^2}.$$

(*b*) The speed v of a point 3.0 m from the center of the rotating disk at $t = 2.0\,\mathrm{s}$ is, using Eq. 10–4,

$$v = R\omega = (3.0\,\mathrm{m})(1.6 + 1.2\,t)\mathrm{s}^{-1} = (3.0\,\mathrm{m})(4.0\,\mathrm{s}^{-1}) = 12.0\,\mathrm{m/s}.$$

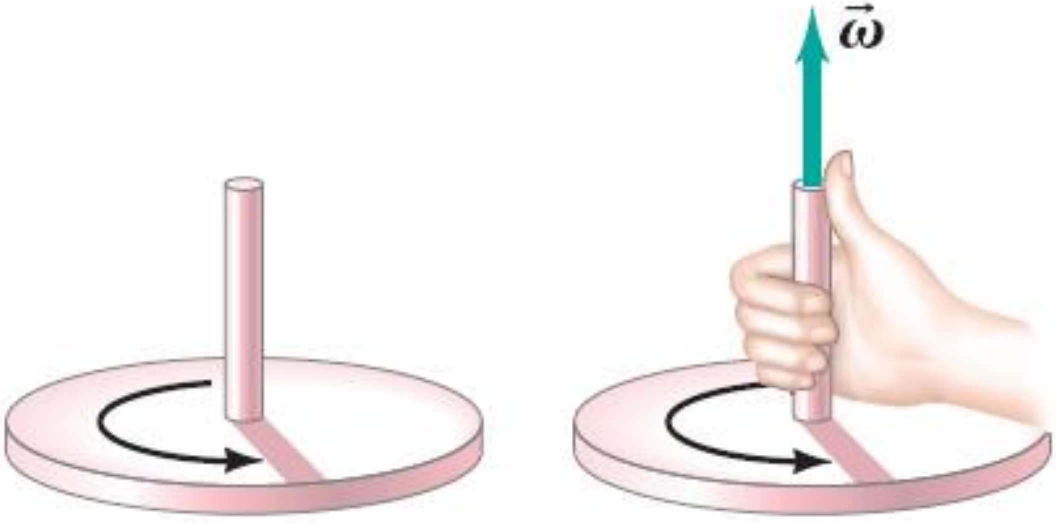
The components of the linear acceleration of this point at $t = 2.0\,\mathrm{s}$ are

$$a_{\tan} = R\alpha = (3.0\,\mathrm{m})(1.2\,\mathrm{rad/s^2}) = 3.6\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_{\mathrm{R}} = \omega^2 R = \left[(1.6 + 1.2\,t)\mathrm{s}^{-1}\right]^2(3.0\,\mathrm{m}) = (4.0\,\mathrm{s}^{-1})^2(3.0\,\mathrm{m}) = 48\,\mathrm{m/s^2}.$$

10-2 Διανυσματική Φύση των Γωνιακών Ποσοτήτων

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας έχει διεύθυνση τον άξονα περιστροφής και κατεύθυνση (προσανατολισμό) , αυτή που προβλέπει ο κανόνας του δεξιόστροφου κοχλία (ή της δεξιάς παλάμης).



10-3 Σταθερή Γωνιακή Επιτάχυνση

Για σταθερή επιτάχυνση οι εξισώσεις κίνησης είναι απολύτως ανάλογες με αυτές της γραμμικής κίνησης.

Angular	Linear
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	$v^2 = v_0^2 + 2ax$
$\overline{\omega} = \dfrac{\omega + \omega_0}{2}$	$\overline{v} = \dfrac{v + v_0}{2}$

Μια φυγόκεντρος επιταχύνεται από μηδέν σε 20,000 rpm μέσα σε 30 s. (α) Πόση είναι η μέση επιτάχυνση; (β) Πόσες στροφές έκανε η φυγόκεντρος στο χρόνο αυτό; Υποθέστε σταθερή γωνιακή επιτάχυνση

APPROACH To determine $\bar{\alpha} = \Delta\omega/\Delta t$, we need the initial and final angular velocities. For (*b*), we use Eqs. 10–9 (recall that one revolution corresponds to $\theta = 2\pi$ rad).

SOLUTION (*a*) The initial angular velocity is $\omega = 0$. The final angular velocity is

$$\omega = 2\pi f = (2\pi\ \mathrm{rad/rev})\frac{(20{,}000\ \mathrm{rev/min})}{(60\ \mathrm{s/min})} = 2100\ \mathrm{rad/s}.$$

Then, since $\bar{\alpha} = \Delta\omega/\Delta t$ and $\Delta t = 30\ \mathrm{s}$, we have

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{2100\ \mathrm{rad/s} - 0}{30\ \mathrm{s}} = 70\ \mathrm{rad/s^2}.$$

That is, every second the rotor's angular velocity increases by $70\ \mathrm{rad/s}$, or by $(70/2\pi) = 11$ revolutions per second.

(*b*) To find θ we could use either Eq. 10–9b or 10–9c, or both to check our answer. The former gives

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}(70\ \mathrm{rad/s^2})(30\ \mathrm{s})^2 = 3.15 \times 10^4\ \mathrm{rad},$$

where we have kept an extra digit because this is an intermediate result. To find the total number of revolutions, we divide by 2π rad/rev and obtain

$$\frac{3.15 \times 10^4\ \mathrm{rad}}{2\pi\ \mathrm{rad/rev}} = 5.0 \times 10^3\ \mathrm{rev}.$$

NOTE Let us calculate θ using Eq. 10–9c:

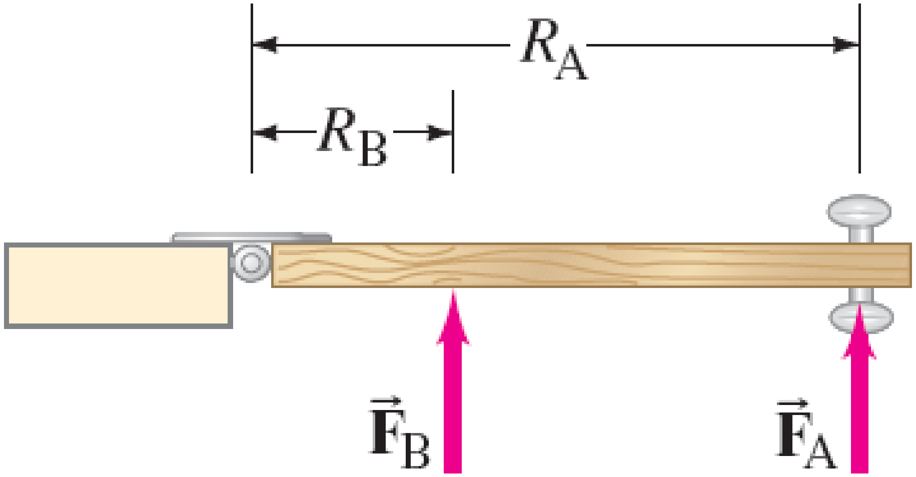
$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{(2100\ \mathrm{rad/s})^2 - 0}{2(70\ \mathrm{rad/s^2})} = 3.15 \times 10^4\ \mathrm{rad}$$

which checks our answer using Eq. 10–9b perfectly.

10-4 Ροπή

Για να αρχίσει να περιστρέφεται ένα αντικείμενο απαιτείται δύναμη. Το σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη αλλά και η διεύθυνσή της είναι ουσιώδη.

Η απόσταση του σημείου στο οποίο δρα η δύναμη περιστροφής από τον άξονα περιστροφή ονομάζεται μοχλοβραχίονας.



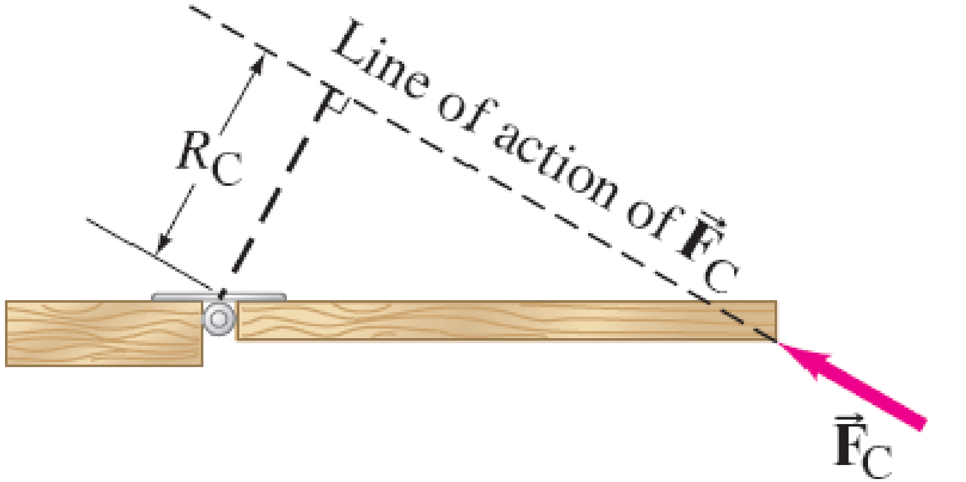
10-4 Ροπή

Ο μακρύς μοχλοβραχίονας είναι ενίοτε πολύ χρήσιμος

10-4 Ροπή

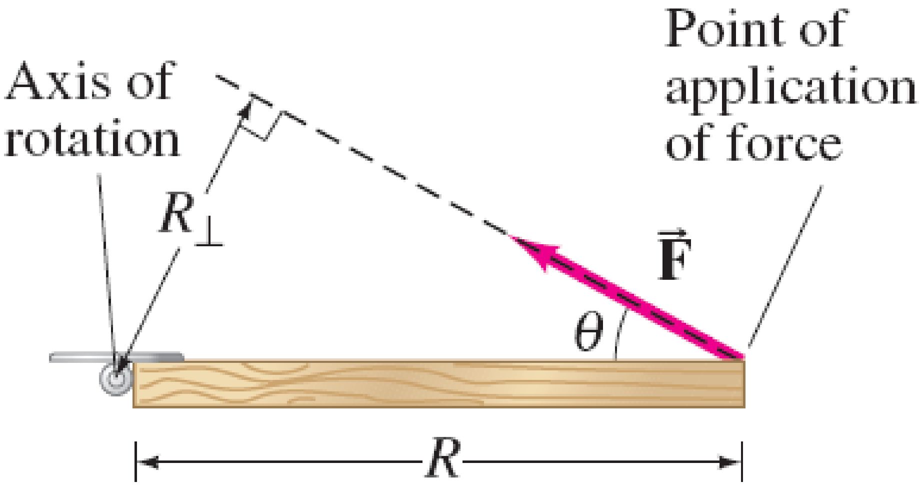
F_A : ο μοχλοβραχίονας ισούται με την απόσταση πόμολο-μεντεσές

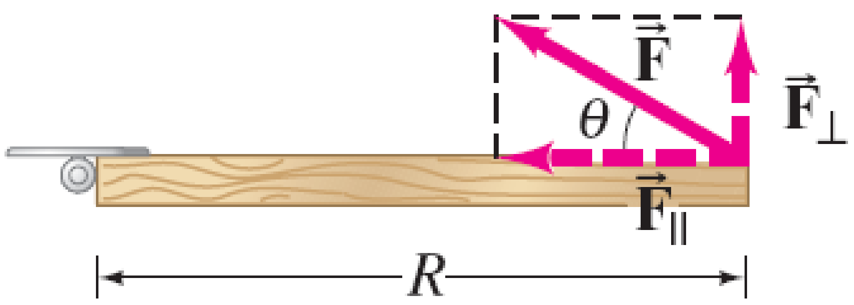
F_D : ο μοχλοβραχίονας ισούται με μηδέν



F_C : βλέπε σχήμα

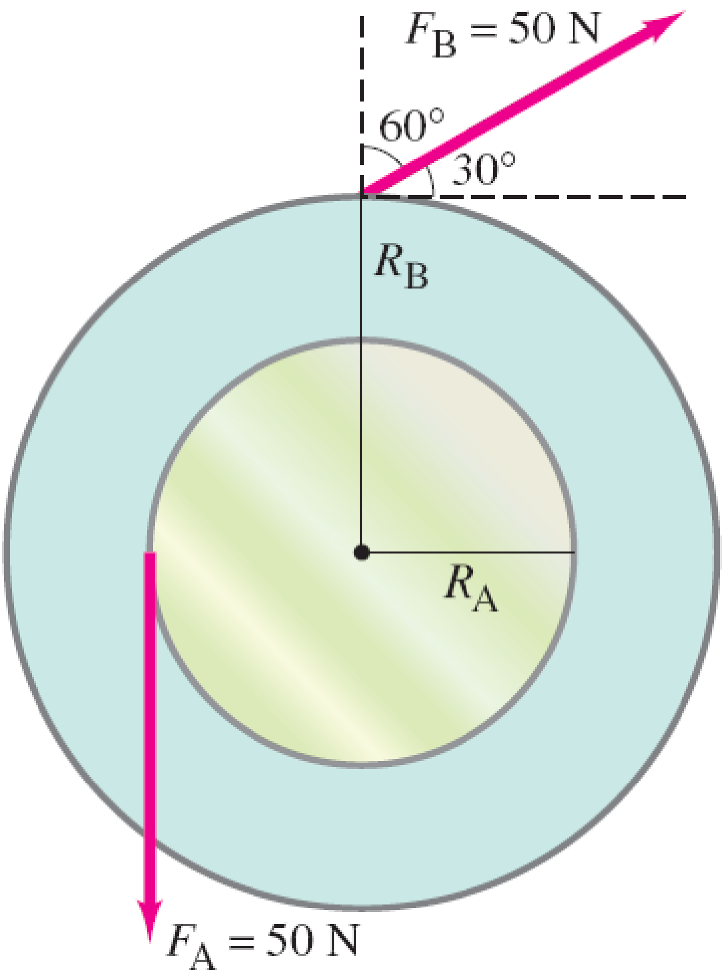
10-4 Torque (Ροπή)



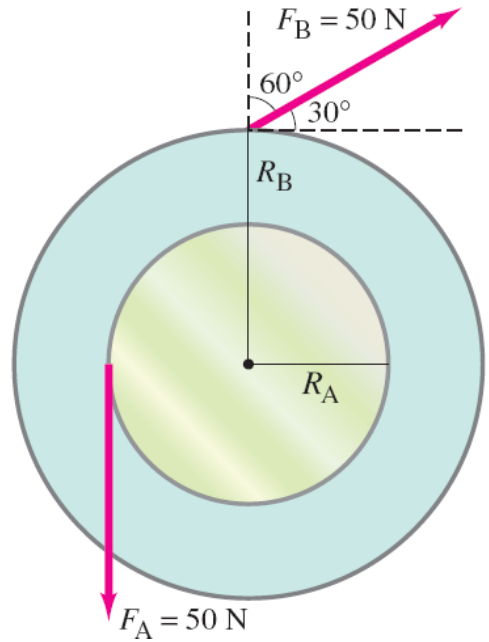


Η Ροπή ορίζεται από την σχέση:

$$\tau = R_\perp F.$$



Δύο τροχοί έχουν ακτίνες R_A = 30 cm και R_B = 50 cm, συνδέονται μέσω κεντρικού άξονα περιστροφής. Υπολογίστε την συνολική ροπή στον τροχό εξ αιτίας των δύο δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα (50 N έκαστη).



APPROACH The force $\vec{\mathbf{F}}_A$ acts to rotate the system counterclockwise, whereas $\vec{\mathbf{F}}_B$ acts to rotate it clockwise. So the two forces act in opposition to each other. We must choose one direction of rotation to be positive—say, counterclockwise. Then $\vec{\mathbf{F}}_A$ exerts a positive torque, $\tau_A = R_A F_A$, since the lever arm is R_A. On the other hand, $\vec{\mathbf{F}}_B$ produces a negative (clockwise) torque and does not act perpendicular to R_B, so we must use its perpendicular component to calculate the torque it produces: $\tau_B = -R_B F_{B\perp} = -R_B F_B \sin\theta$, where $\theta = 60°$. (Note that θ must be the angle between $\vec{\mathbf{F}}_B$ and a radial line from the axis.)

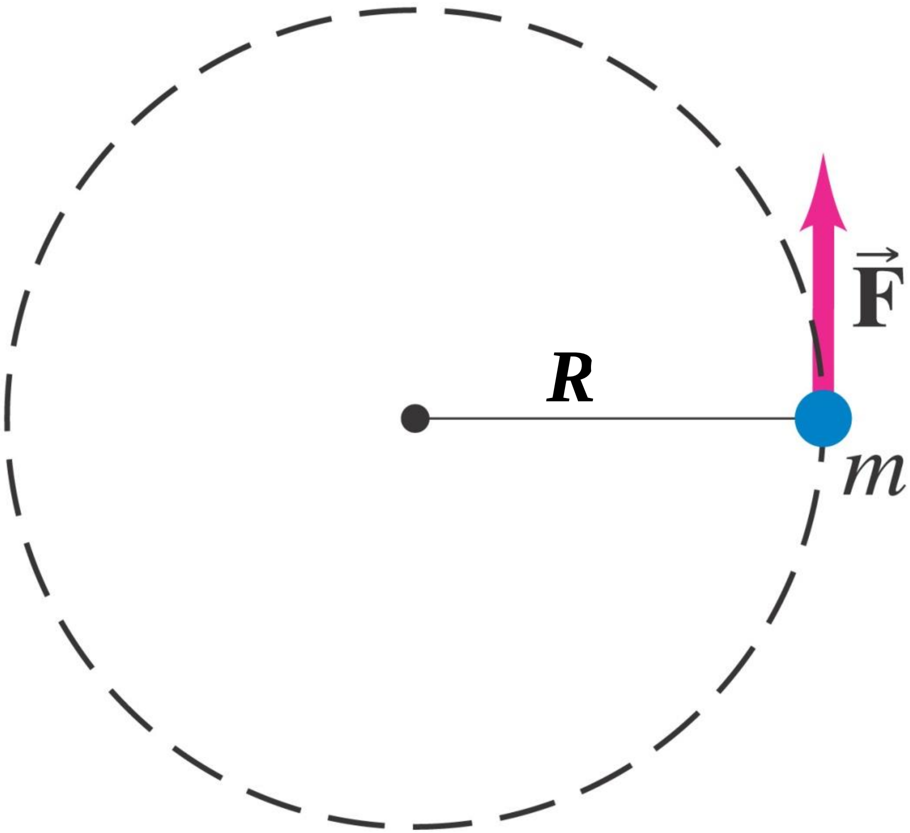
SOLUTION The net torque is

$$\begin{aligned} \tau &= R_A F_A - R_B F_B \sin 60° \\ &= (0.30\,\text{m})(50\,\text{N}) - (0.50\,\text{m})(50\,\text{N})(0.866) = -6.7\,\text{m}\cdot\text{N}. \end{aligned}$$

This net torque acts to accelerate the rotation of the wheel in the clockwise direction.

10-5 Δυναμική Περιστροφικής Κίνησης-Ροπή και Αδράνεια Περιστροφής

Γνωρίζοντας $F = ma$, βλέπουμε ότι $\tau = mR^2\alpha.$



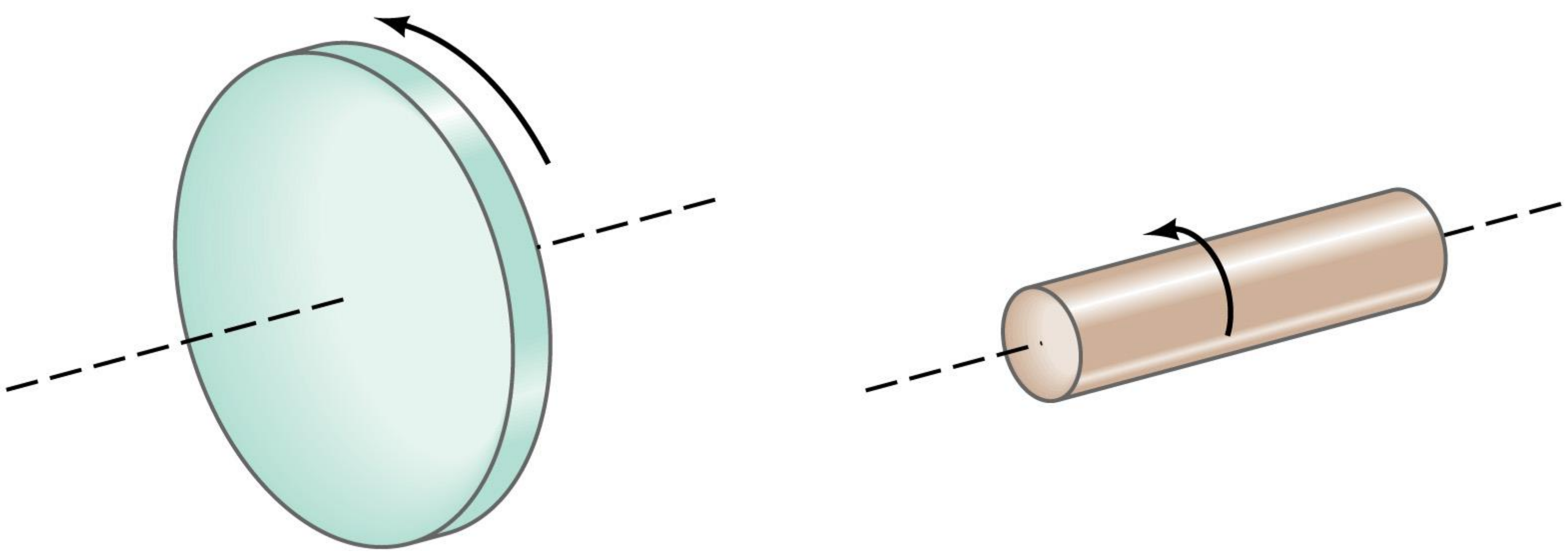
Η σχέση αυτή ισχύει για σημείο, τι συμβαίνει όμως για εκτεταμένα σώματα;

Μιας και η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίδια για όλα τα σημεία του σώματος, γράφουμε :

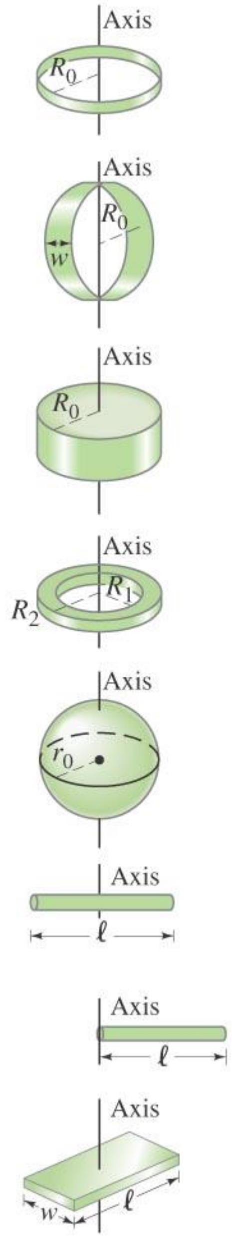
$$\Sigma\tau = \left(\Sigma mR^2\right)\alpha.$$

Η ποσότητα $I = \Sigma m_i R_i^2$ ονομάζεται ροπή αδράνειας του σώματος.

Βλέπουμε ότι από τον ορισμό αυτό, **έχει σημασία πως είναι κατανεμημένη η μάζα** σε ένα σύνθετο αντικείμενο (π.χ. μόριο). Στο παράδειγμα βλέπουμε δύο αντικείμενα με την ίδια μάζα αλλά η ροπή αδράνειας ως προς του άξονες περιστροφής που απεικονίζονται είναι διαφορετικές. Ο δίσκος έχει μεγαλύτερη αδράνεια.



	Object	Location of axis	Moment of inertia
(a)	**Thin hoop,** radius R_0	Through center	MR_0^2
(b)	**Thin hoop,** radius R_0 width w	Through central diameter	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
(c)	**Solid cylinder,** radius R_0	Through center	$\frac{1}{2}MR_0^2$
(d)	**Hollow cylinder,** inner radius R_1 outer radius R_2	Through center	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
(e)	**Uniform sphere,** radius r_0	Through center	$\frac{2}{5}Mr_0^2$
(f)	**Long uniform rod,** length ℓ	Through center	$\frac{1}{12}M\ell^2$
(g)	**Long uniform rod,** length ℓ	Through end	$\frac{1}{3}M\ell^2$
(h)	**Rectangular thin plate,** length ℓ, width w	Through center	$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$



Εκτός από την κατανομή της μάζας σημασία έχει και η θέση του άξονα περιστροφής

10-6 Πως λύνουμε προβλήματα Περιστροφής

1. Διάγραμμα.
2. Επιλέγουμε το σύστημα.
3. Διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος απεικονίζοντας όλες τις δυνάμεις.
4. Βρίσκουμε τους άξονες περιστροφής και τις ροπές και τις ροπές αδράνειας.

5. Εφαρμόζουμε τους Νόμους του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση ή άλλη κίνηση που έχουμε.

6. Λύνουμε.

8. Ελέγχουμε τις μονάδες και την τάξη μεγέθους του αποτελέσματος.

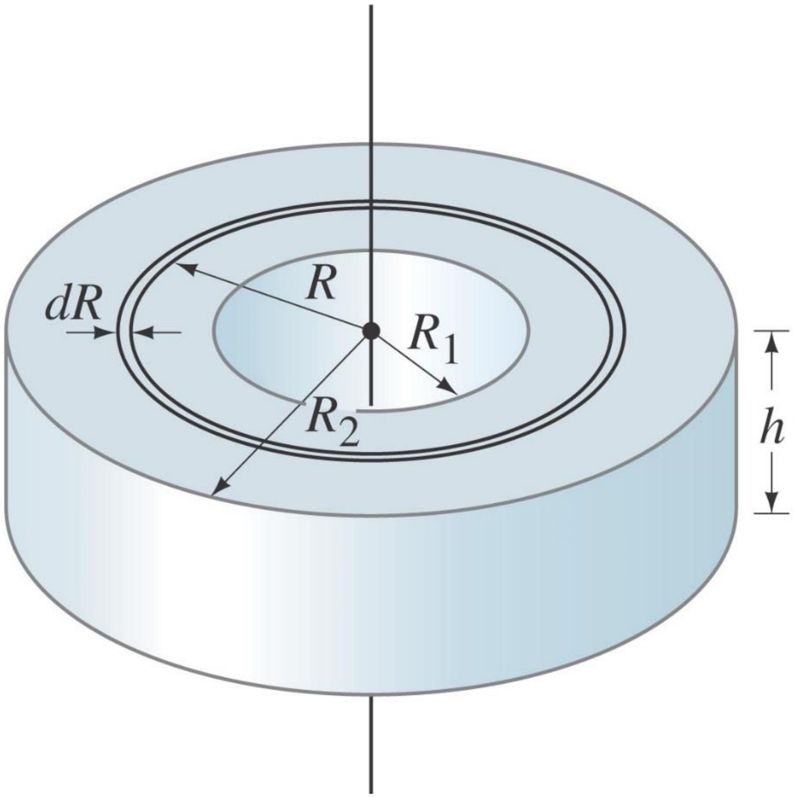
10-7 Προσδιορισμός Ροπών Αδράνειας

Η Ροπή αδράνειας μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά όταν το αντικείμενο είναι διαθέσιμο.

Εάν το αντικείμενο είναι συμπαγές χρησιμοποιούμε την σχέση:

$$I = \int R^2 \, dm.$$

(α) Δείξτε ότι ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου με εσωτερική ακτίνα R_1, εξωτερική ακτίνα και μάζα Μ M, είναι $I = ½\, M(R_1^2 + R_2^2)$, ως προς τον άξονα περιστροφής του σχήματος. (β) Πόση είναι η ροπή αδράνειας εάν ο κύλινδρος δεν είχε την κεντρική οπή (συμπαγής).



APPROACH We know that the moment of inertia of a thin ring of radius R is mR^2. So we divide the cylinder into thin concentric cylindrical rings or hoops of thickness dR, one of which is indicated in Fig. 10–24. If the density (mass per unit volume) is ρ, then

$$dm = \rho\, dV,$$

where dV is the volume of the thin ring of radius R, thickness dR, and height h. Since $dV = (2\pi R)(dR)(h)$, we have

$$dm = 2\pi\rho h R\, dR.$$

SOLUTION (a) The moment of inertia is obtained by integrating (summing) over all these rings:

$$I = \int R^2\, dm = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho h R^3\, dR = 2\pi\rho h\left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}\right] = \frac{\pi\rho h}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right),$$

where we are given that the cylinder has uniform density, ρ = constant. (If this were not so, we would have to know ρ as a function of R before the integration could be carried out.) The volume V of this hollow cylinder is $V = \left(\pi R_2^2 - \pi R_1^2\right)h$, so its mass M is

$$M = \rho V = \rho\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)h.$$

Since $\left(R_2^4 - R_1^4\right) = \left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)$, we have

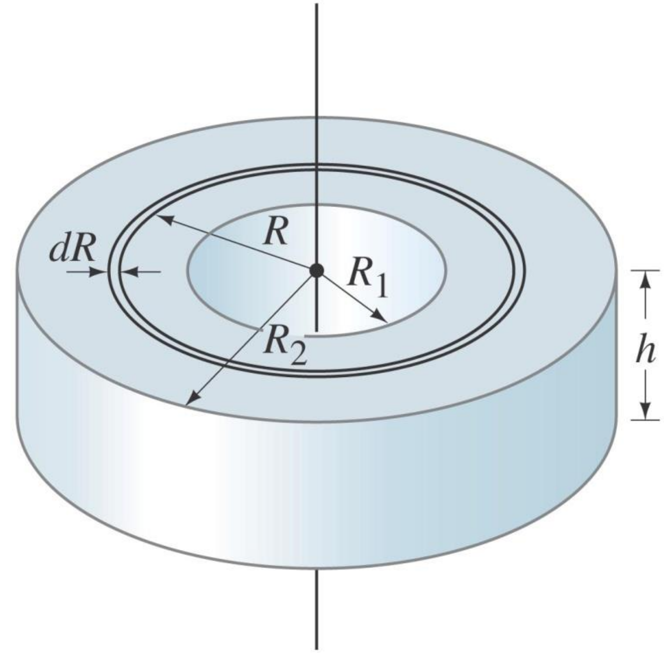
$$I = \frac{\pi\rho h}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right) = \tfrac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right),$$

as stated in Fig. 10–20d.

(b) For a solid cylinder, $R_1 = 0$ and if we set $R_2 = R_0$, then

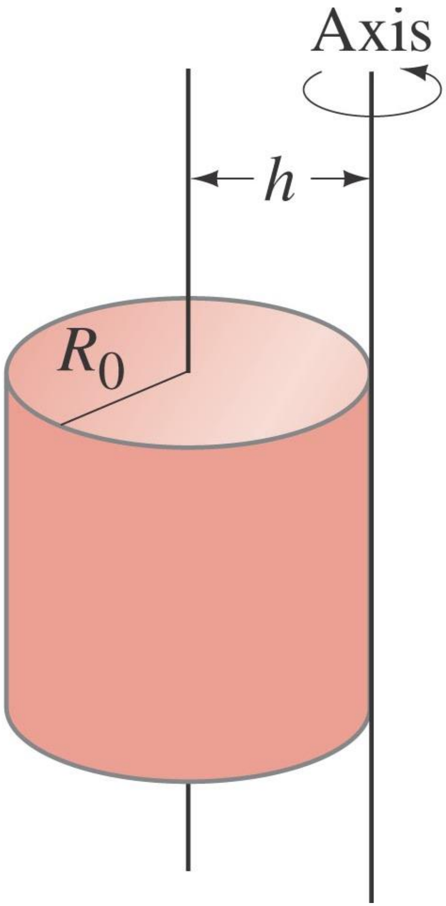
$$I = \tfrac{1}{2}MR_0^2,$$

which is that given in Fig. 10–20c for a solid cylinder of mass M and radius R_0.



Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων μας επιτρέπει αν προσδιορίσουμε την ροπή αδράνειας ως προς άξονα παράλληλο με άξονα που περνά από το ΚΜ :

$$I = I_{CM} + Mh^2.$$



Βρείτε την ροπή αδράνειας του κυλίνδρου με ακτίνα R_0 και μάζα M ως προς άξονα παράλληλο στον άξονα συμμετρίας και σε απόσταση $h=R_0$.

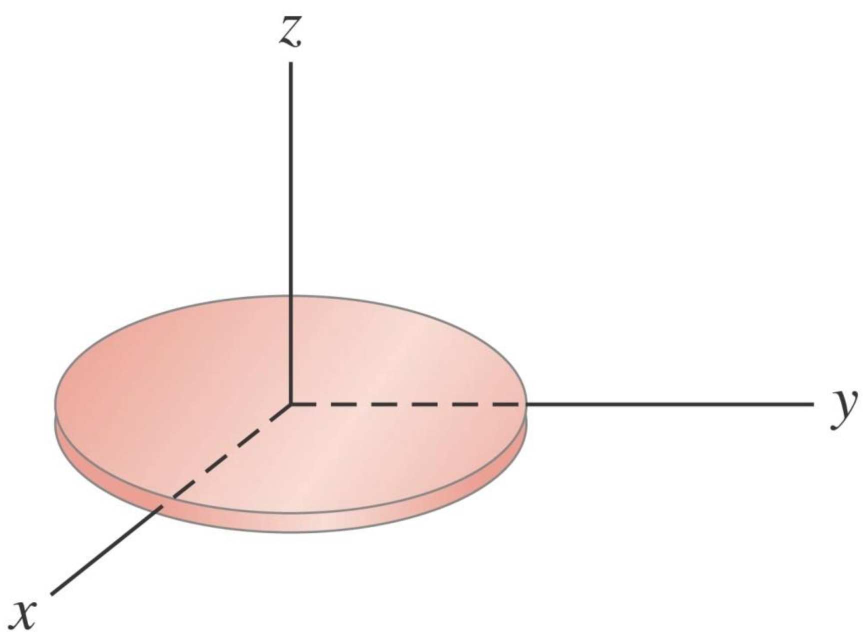
APPROACH We use the parallel-axis theorem with $I_{CM} = \frac{1}{2}MR_0^2$ (Fig. 10–20c).

SOLUTION Since $h = R_0$, Eq. 10–17 gives

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \frac{3}{2}MR_0^2.$$

Για επίπεδα αντικείμενα ισχύει η σχέση.

$$I_z = I_x + I_y.$$



10-8 Περιστροφική Ενέργεια

Η Κινητική ενέργεια ενός αντικειμένου που περιστρέφεται είναι

$$K = \Sigma\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right).$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε ότι:

$$\text{rotational } K = \tfrac{1}{2} I \omega^2.$$

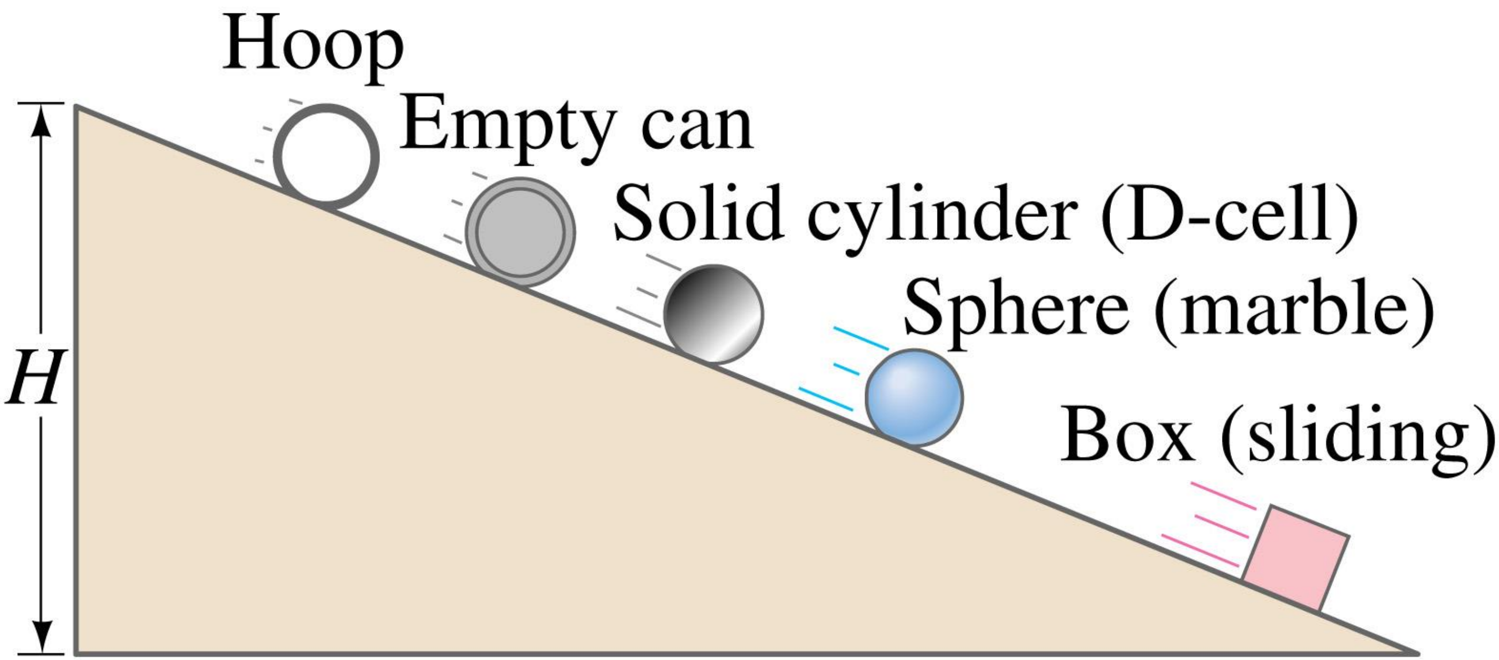
Συνολικά η «κινητική ενέργεια» του αντικειμένου είναι:

$$K = \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2 + \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega^2.$$

10-8 Διατήρηση της Ενέργειας

Όλες οι μορφές ενέργειας λαμβάνονται υπόψη όταν εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας .

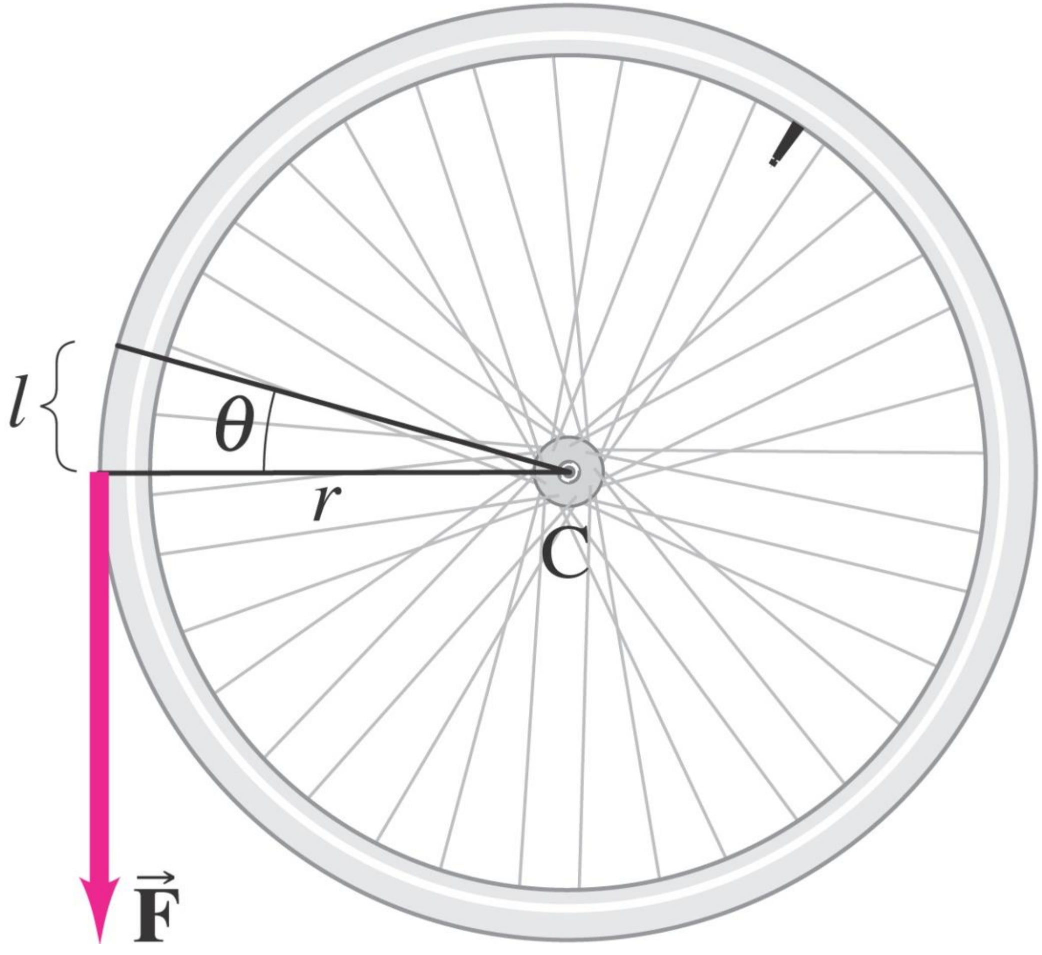
Όλα τα αντικείμενα στου σχήματος έχουν την ίδια δυναμική ενέργεια στην κορυφή αλλά στο τέλος της κλίσης, η κατανομή της ενέργειας διαφέρει από αντικείμενο σε αντικείμενο, αν και η συνολική ενέργεια είναι σταθερή.



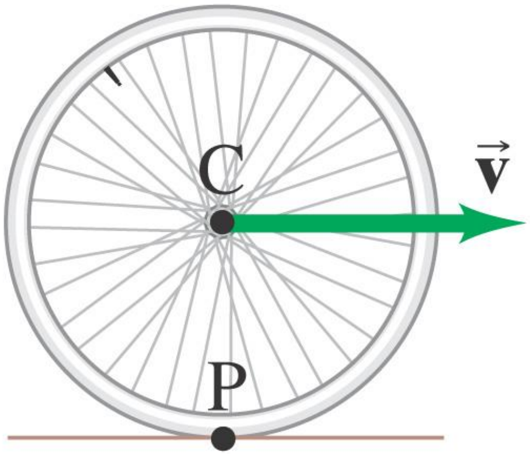

ΠΑΙΔΙΑ, ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΠΑΡΑΔΕΧΤΟΥΜΕ ΟΤΙ ΣΤΗΝ ΚΑΤΗΦΟΡΑ ΕΙΝΑΙ ΑΠΙΑΣΤΟΣ Ο ΚΩΛΟΤΟΥΜΠΑΣ
ΕΚΛΟΓΕΣ
24.8.2013

Το έργο της ροπής είναι :

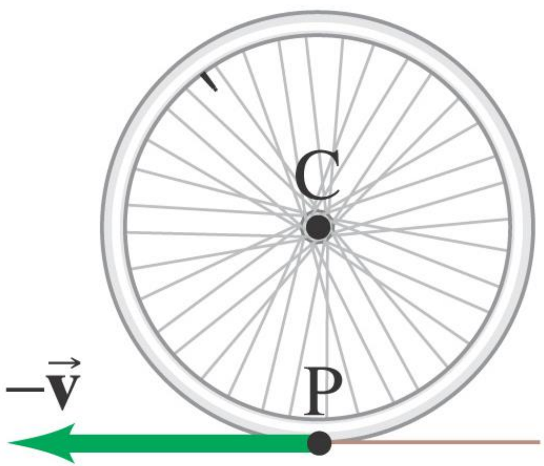
$$W = \tau \Delta \theta.$$



10-9 Κύλιση-Μεταφορική και Περιστροφική Ενέργεια



Στην πάνω περίπτωση η ρόδα κυλάει χωρίς να ολισθαίνει. Το σημείο P, σε επαφή με το έδαφος, στιγμιαία είναι ακίνητο και το κέντρο κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$.



Στην κάτω περίπτωση το κέντρο παραμένει ακίνητο και το σημείο P κινείται με ταχύτητας $-\vec{v}$.

Η σχέση γραμμικής και γωνιακής σπουδής είναι :

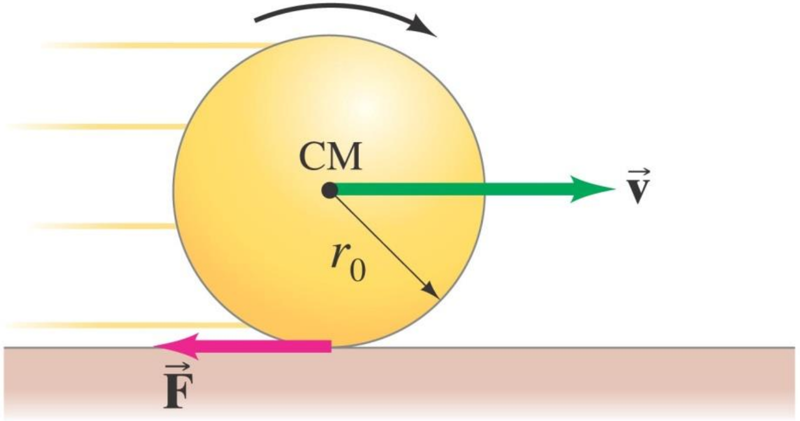
$$v = R\omega.$$

10-10 Γιατί επιβραδύνει μια σφαίρα που κυλάει;

Ποια είναι η δύναμη που σταματάει τη σφαίρα;

Εάν πούμε απλά η δύναμη της «τριβής» τότε προκύπτουν τα εξής προβλήματα:

- **Η τριβή δρα στο σημείο επαφής και επομένως από το σχήμα βλέπουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας θα πρέπει να αυξάνεται!**
- **Η βαρύτητα και η κάθετη δύναμη έχουν κατεύθυνση κατά μήκος της ακτίνας και επομένως μηδενική ροπή.**



Απάντηση: **Η τέλεια σφαίρα δεν σταματά ποτέ!**

Η μικρές παραμορφώσεις, αποκλίσεις από την τέλεια σφαίρα και την απόλυτα επίπεδη επιφάνεια, δηλ. την σημειακή επαφή με την επιφάνεια, δημιουργούν ροπές που τελικά ακινητοποιούν την σφαίρα.