Εισαγωγή στη Στατιστική Μηχανική

Στόχος: *μικρόκοσμος* ⟷ *μακρόκοσμο*

Ιδιότητα: **είναι οτιδήποτε σχετικό με το σύστημα που μπορούμε να μετρήσουμε (π.χ. χρώμα ενέργεια ύψος πλάτος**

Συλλογή: **σύνολο του οποίου τα μέλη έχουν την ιδιότητα που μας ενδιαφέρει**

Τιμές Ιδιοτήτων

Διακριτές: **είναι πεπερασμένος ο αριθμός των τιμών που μπορεί να λάβει η ιδιότητα.**

Συνεχής: **η ιδιότητα μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα των επιτρεπτών τιμών**

Πιθανότητα

Για Διακριτές Τιμές: $$P_A = \frac{N_A}{N}$$ **όπου N_A, ο αριθμός των μελών της συλλογής που έχουν την τιμής «Α» και Ν ο συνολικός αριθμός των μελών της συλλογής**

ΕΤΟΣ **ΧΡΩΜΑ**	**1**	**2**
Μαύρο	60	15
Κόκκινο	10	15

N=60+15+10+15=100

Ποια είναι η πιθανότητα να διαλέξει κάποιος Μαύρο αυτοκίνητο ενός έτους;

$$P_{M1} = \frac{60}{100} = 0{,}6$$

Ποια είναι η πιθανότητα να διαλέξει κάποιος Κόκκινο αυτοκίνητο δύο ετών;

$$P_{K2} = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

$$\boxed{0 \le P \le 1}$$

Κανονικοποίηση Πιθανότητας

$$\sum_{A=1}^{N} P_A = 1$$

$$\text{Εάν } \; P_{\mathrm{A}} = af(A) \Rightarrow \sum_{A=1}^{N} af(A) = 1 \Rightarrow a \sum_{A=1}^{N} f(A) = 1$$

$$a = \frac{1}{\sum_{A=1}^{N} f(A)} \Rightarrow P_A = \frac{f(A)}{\sum_{A=1}^{N} f(A)}$$

Μέσος Όρος

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^{N} A_i P_i = \sum_{i=1}^{N} A_i \frac{N_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i N_i}{N}$$

$$= \frac{A_1 + A_2 + A_1 + A_4 + A_5 + \ldots\ldots A_N}{N}$$

Πειραμτικές Τιμές															<x>
													N	Αθροισμα	Αθροισμα/Ν
5,0	4,0	4,0	3,0	5,0	5,0	3,0	4,0	5,0	5,0	3,0	3,0	4,0	13	53,0	4,1
5	4		4												
25	16		12											53,0	

Ροπές

Σαν ροπή (moment) ορίζουμε την διαφορά κάποιας τιμής από τον μέσο όρο

$$\delta A^m = \left(A_i - \langle A \rangle\right)^m$$

όπου m είναι η τάξη της ροπής

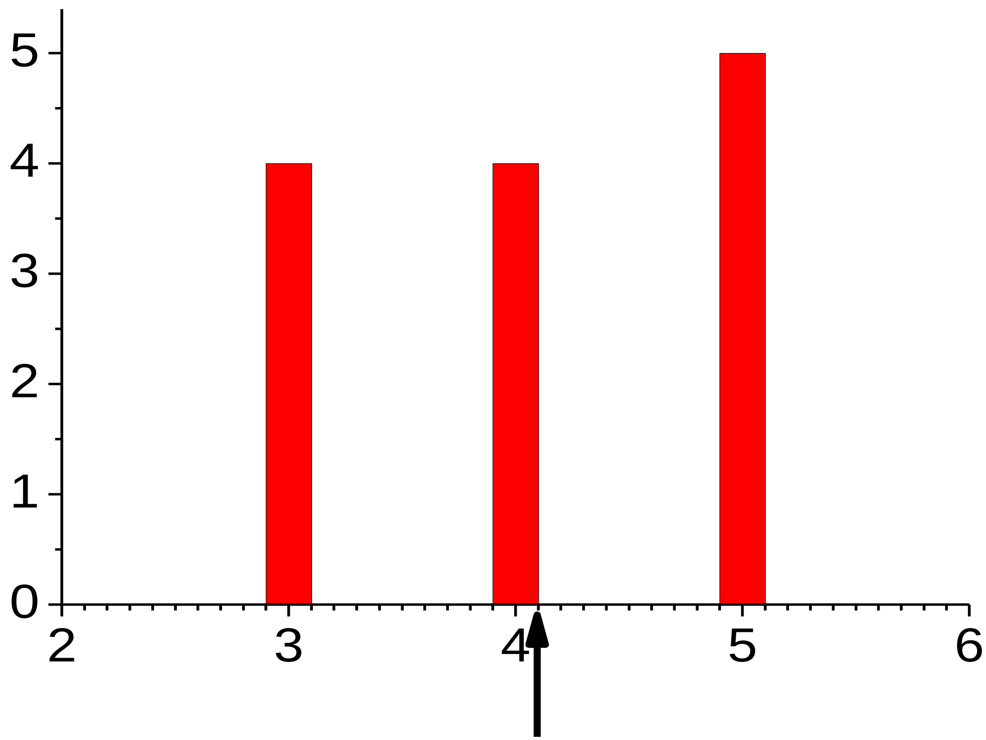
$$\langle \delta A \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left(A_i - \langle A \rangle\right) P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} A_i P_i - \sum_{i=1}^{N} \langle A \rangle P_i = \langle A \rangle - \langle A \rangle \sum_{i=1}^{N} P_i$$

$$= \langle A \rangle - \langle A \rangle = 0$$

Ο μέσος όρος της ροπής πρώτης τάξης (m=1) είναι ΜΗΔΕΝ. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι ο ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ είναι το «κέντρο βάρος» των τιμών

Πειραματικές Τιμές															<x>
													N	Αθροισμα	Αθροισμα/N
5,0	4,0	4,0	3,0	5,0	5,0	3,0	4,0	5,0	5,0	3,0	3,0	4,0	13	53,0	4,1
5	4		4												
25	16		12											53,0	



$$\left\langle \delta A^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \left(A_i - \langle A \rangle\right)^2 P_i = \sum_{i=1}^{N} \left(A_i{}^2 - 2A_i \langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \right) P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} A_i{}^2 P_i - \sum_{i=1}^{N} 2A_i \langle A \rangle P_i + \sum_{i=1}^{N} \langle A \rangle^2 P_i$$

$$= \left\langle A^2 \right\rangle - 2\langle A \rangle \sum_{i=1}^{N} A_i P_i + \langle A \rangle^2 \sum_{i=1}^{N} P_i$$

$$= \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2$$

Ορίζουμε την **ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ S** ως

$$S = \pm\sqrt{\left\langle \delta A^2 \right\rangle} = \pm\sqrt{\left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2}$$

With a series of measurements x_i and errors σ_i, the weights are

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

and the mean value is estimated as

$$\mu_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{j=1}^{N} w_j}$$

To compute the error in the measurement μ_m we need to again use error propagation. Consider a single term in the sum

$$\frac{w_i x_i}{\sum_j w_j} = \frac{x_i}{\sigma_i^2 (\sum_j w_j)}$$

This single term has error

$$\frac{1}{\sigma_i (\sum_j w_j)}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_m^2 &= \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\frac{1}{\sum_j w_j} \right)^2 \\
&= \sum_i w_i \left(\frac{1}{\sum_j w_j} \right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sum_j w_j} \right) \\
\sigma_m &= \sqrt{\frac{1}{\sum_j w_j}}
\end{aligned}$$

Μια χρήσιμη κατανομή πιθανοτήτων για διακριτές μεταβλητές είναι η κατανομή Poisson

$$P_n = \frac{\varepsilon^n}{n!}\exp(-\varepsilon)$$

όπου ε είναι ένας αριθμός μεταξύ 0 και ∞.

(α) Δείξατε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$.

(β) Υπολογίστε $\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$.

(γ) Υπολογίστε $\langle n^2 \rangle$, την διαφοροποίηση, και την τυπική απόκλιση.

(δ) Υπολογίστε το *τρόπο* (mode) της κατανομής δηλ. την πιο πιθανή τιμή.

(ε) Για ε=1.5 υπολογίστε την P_n για $0 \le n \le 10$. Επιβεβαιώστε ότι $\sum P_n = 1$.

Υπολογίστε άμεσα $\langle n^2 \rangle$ ελέγχοντας έτσι το αποτέλεσμα της (γ).

(α) $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \exp(-\varepsilon) = e^{-\varepsilon}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\right) = e^{-\varepsilon} e^{+\varepsilon} = e^0 = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1}$$

(β) $$\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,\varepsilon^n}{n!} e^{-\varepsilon}$$ θέτουμε $n = m+1 \Rightarrow$

$$\langle n\rangle = \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{(m+1)\,\varepsilon^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\varepsilon} = \underbrace{\frac{(-1+1)\,\varepsilon^{-1+1}}{(-1+1)!} e^{-\varepsilon}}_{\to 0} + \sum_{m=0}^{\infty} \cancel{(m+1)} \frac{\varepsilon^{m+1} e^{-\varepsilon}}{m!\,\cancel{(m+1)}} =$$

$$= \varepsilon \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} e^{-\varepsilon}}_{1} \Longrightarrow \boxed{\langle n\rangle = \varepsilon}$$

∞

(γ) $\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\varepsilon^n}{n!} e^{-\varepsilon}$ και πάλι θέτουμε $n = m+1 \Rightarrow$

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{m=-1}^{\infty} (m+1)^2 \frac{\varepsilon^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\varepsilon} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{m!} \varepsilon^{m+1} e^{-\varepsilon}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\varepsilon^{m+1}}{m!} e^{-\varepsilon} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{m+1}}{m!} e^{-\varepsilon} =$$

$$= \varepsilon \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\varepsilon^{m}}{m!} e^{-\varepsilon}}_{\langle m \rangle = \varepsilon} + \varepsilon \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{m}}{m!} e^{-\varepsilon}}_{1} \Rightarrow \boxed{\langle n^2 \rangle = \varepsilon^2 + \varepsilon}$$

Διαφοροποίηση $\langle \delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon - \varepsilon^2 \Rightarrow \boxed{\langle \delta n^2 \rangle = \varepsilon}$

Τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\langle \delta n^2 \rangle} \Rightarrow \boxed{\sigma = \sqrt{\varepsilon}}$

(δ) Ο τρόπος $\hat{n}$ βρίσκεται:

Υποθέτουμε ότι $\varepsilon < 1$. Τότε $\varepsilon = \frac{1}{E}$ όπου $E > 1 \Rightarrow$

$P_n = \frac{\varepsilon^n e^{-\varepsilon}}{n!} = \frac{1}{E^n n! \, e^{\varepsilon}}$. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το n, η P_n μικραίνει και

επομένως η μέγιστη τιμή της P_n επιτυγχάνεται όταν $n=0 \Rightarrow$

όταν $\boxed{\varepsilon < 1 \Rightarrow \text{ο τρόπος } \hat{n} = 0}$

Όταν $\varepsilon \geqslant 1$ τότε αν υποθέσουμε ότι ο τρόπος είναι το m τότε συγκρίνουμε

$$\frac{P_m}{P_{m+1}} = \frac{(\varepsilon^m/m!)\, e^{-\varepsilon}}{(\varepsilon^{m+1}/(m+1)!)\, e^{-\varepsilon}} = \frac{m+1}{\varepsilon}$$

Υποθέσαμε όμως ότι m είναι ο τρόπος, επομένως πρέπει

$$\frac{P_m}{P_{m+1}} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{m+1}{\varepsilon} \geqslant 1 \Rightarrow m \geqslant \varepsilon - 1$$

Στη χειρότερη περίπτωση $m = \varepsilon - 1$, συνεπάγεται ότι όταν το $\varepsilon - 1$ είναι ακέραιος υπάρχουν δύο μέγιστες τιμές $m = \varepsilon$ και $m = \varepsilon - 1$ (π.χ. όταν $\varepsilon = 3 \Rightarrow m = 2$ και $m = 3$)

Για Συνεχής Μεταβλητές

$$dP(x) = f(x)dx$$

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) f(x)dx$$

Όπου ***f(x)*** ονομάζεται ***πυκνότητα της πιθανότητας ή πιθανολογική πυκνότητας ή κατανομή***

$$P(x, y, z...) = P(x)P(y)P(z)..$$

Όταν η μεταβλητές ***x,y,z…*** είναι ***ανεξάρτητες.***

Για μία σταθερή κατανομή $p(x)$:

$$p(x) = \begin{cases} \text{σταθερή} \quad = A & a \leq x \leq b \\ 0 & \boldsymbol{x < a \ \eta \ x > b} \end{cases}$$

Βρείτε τα: A, $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, σ_x^2, and σ_x

Κανονικοποίηση

$$\int_a^b p(x)dx = 1 = A\int_a^b dx = A(b-a)$$

Επομένως $A = 1/(b-a)$ και

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \boldsymbol{x < a \ \eta \ x > b} \end{cases}$$

Για να βρούμε το μέσο όρο $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_a^b x p(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Για να βρούμε το ροπή 2ης τάξης $\langle x^2 \rangle$

$$\langle x^2 \rangle = \int_a^b x^2 p(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

Για να βρούμε την διακύμανση και την τυπική απόκλιση

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + a^2 + 2ab}{4}$$

$$= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 3a^2 - 6ab}{12}$$

$$= \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\sigma_x = \pm\sqrt{\sigma_x^2} = \pm\sqrt{\frac{(a-b)^2}{12}} = \pm\frac{(a-b)}{2\sqrt{3}}$$

Για μία Gaussian κατανομή $p(x)$:

$$p(x)dx = ce^{-x^2/2a^2}dx \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\boldsymbol{a \equiv \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}$$

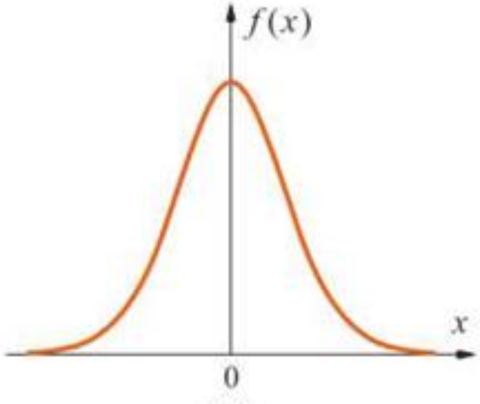
Βρείτε τα c, $\langle x \rangle$, σ_x^2 και σ_x.

Κανονικοποίηση

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 = c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2a^2}dx$$

Για την εκτίμηση του ολοκληρώματος κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων άρτιων (even) συναρτήσεων $f(x) = f(-x)$ σχήμα (a)

$$\int_{-A}^{A} f_{\text{even}}(x)dx = 2\int_{0}^{A} f_{\text{even}}(x)dx$$



(a)

Από πίνακα ολοκληρωμάτων η google it:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \left(\frac{\pi}{4\alpha}\right)^{1/2}$$

$$c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2a^2}dx = 2c\int_0^{\infty} e^{-x^2/2a^2}dx$$

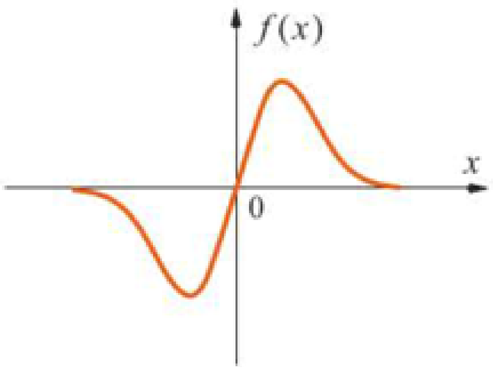
$$= 2c\left(\frac{\pi a^2}{2}\right)^{1/2} = 1$$

$$c = 1/(2\pi a^2)^{1/2}$$

Για να βρούμε το μέσο όρο $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = (2\pi a^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2a^2} dx$$

Για περιττές (Odd) συναρτήσεις $\boldsymbol{f(x) = -f(-x)}$



$$\int_{-A}^{A} f_{odd}(x) dx = 0$$

Επειδή η συνάρτηση $x e^{-x^2/2a^2}$ είναι περιττή :

$$f(x) = x e^{-x^2/2a^2} = -(-x) e^{-\frac{(-x)^2}{2a^2}} = -f(-x)$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2/2a^2} dx = 0$$

Για να βρούμε το ροπή 2ης τάξης $\langle x^2 \rangle$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

$$\langle x^2 \rangle = (2\pi a^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2a^2} dx$$

$$f(x) = x^2 e^{-x^2/2a^2} = f(-x)$$

$$\langle x^2 \rangle = 2(2\pi a^2)^{-1/2} \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2a^2} dx$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{(2\pi a^2)^{1/2}} \frac{(2\pi a^2)^{1/2} a^2}{2} = a^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - 0 = \langle x^2 \rangle$$

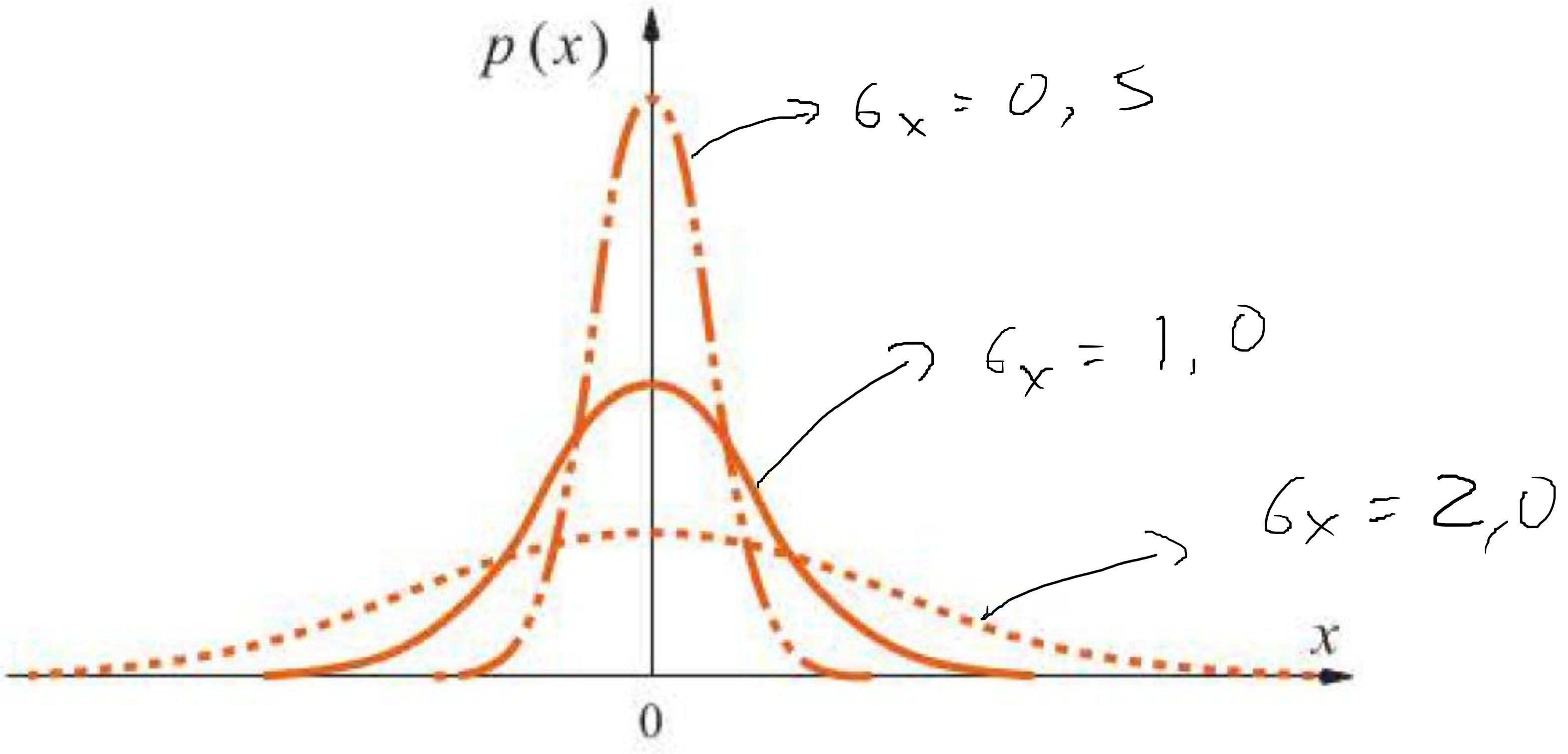
$\langle x \rangle = 0$

$$\sigma_x^2 = a^2$$

$$\boxed{\sigma_x = \pm a}$$

Για μία Gaussian κατανομή $p(x)$:

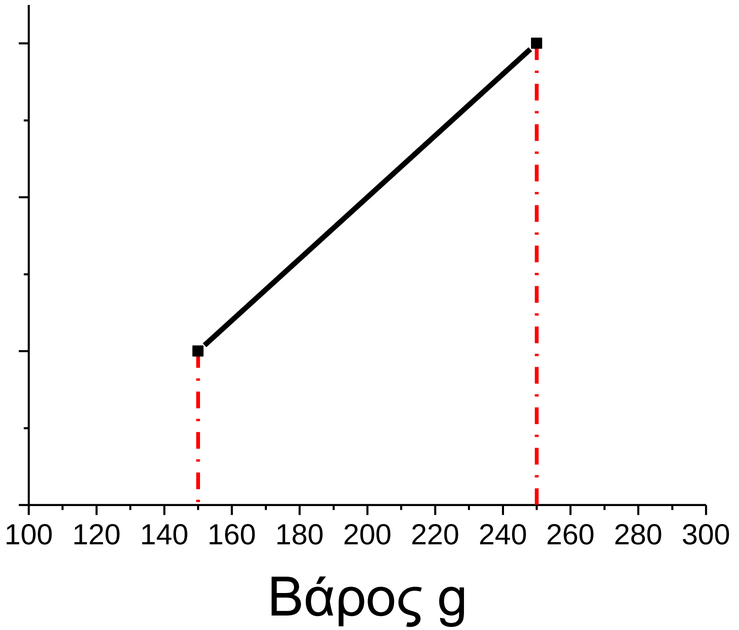
$$p(x)dx = (2\pi\sigma_x^2)^{-1/2} e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx$$



Μικροσκοπικός πληθυσμός από έντομα έχει τα εξής χαρακτηριστικά

- **Το βάρος του (μάζα) κυμαίνεται μεταξύ 150 g και 250 g.**
- **Η κατανομή του βάρους αυξάνεται γραμμικά από τα 150 g στα 250 g και B(250)=3.B(150)**

- **Ποιο είναι το μέσο βάρος του πληθυσμού;**
- **Ποια είναι η τυπική απόκλιση;**



$$f(B) = aB + b$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad f(150) = A = a150g + b \\ \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad f(250) = 3A = a250g + b \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{A}{50g} \qquad \beta = -2\mathrm{A}$$

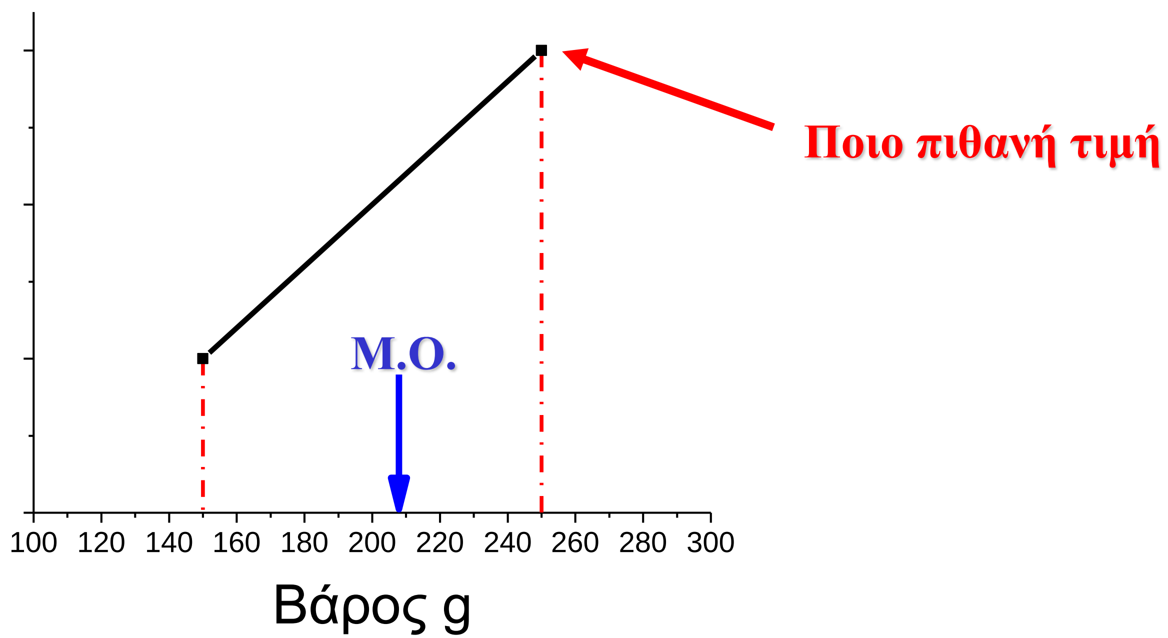
$$f(B) = \frac{A}{50g} B - 2A$$

$$\int_{150g}^{250g} f(B)dB = 1 \Rightarrow \frac{A}{50g} \int_{150g}^{250g} BdB - 2A \int_{150g}^{250g} dB = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{200g}$$

$$f(B) = \frac{1}{10^4 g^2} B - \frac{1}{100g}$$

$$\langle B = \rangle \int_{150g}^{250g} Bf(B)dB = \frac{1}{10^4 g^2} \int_{150g}^{250g} B^2 dB - \frac{1}{100g} \int_{150g}^{250g} BdB \Rightarrow$$

$$\langle B \rangle = 208{,}33g$$



Το ποιο πιθανό βάρος, δηλ. εάν διαλέγατε στην «τύχη» ένα έντομο τι βάρος Θα διαλέγατε; Είναι 250g, δηλ. εκεί που η πιθανότητα έχει την ΜΕΓΙΣΤΗ τιμή.

$$\langle \delta B \rangle = 763{,}91 g^2 \Rightarrow S = \pm\sqrt{\langle \delta B \rangle} = 27{,}64 g$$

Η πυκνότητα της πιθανότητας για ταχύτητες (<u>μόνο το μέγεθος</u>) υ των μορίων ενός αερίου είναι ανάλογες $\upsilon^2 \exp(-m\upsilon^2/2kT)$. Κανονικοποιήστε την συνάρτηση της κατανομής και βρείτε την μέσο όρο ταχύτητα.

$\boxed{2.2}$ $f(v) = A\, v^2 e^{-mv^2/2kT}$, Η συνθήκη κανονικοποίησης είναι

(5pts)

$$\int_0^\infty f(v)\,dv = 1 \Rightarrow \int_0^\infty A v^2 e^{-mv^2/2kT}\,dv = 1 \overset{*}{\Longrightarrow} \quad {}^{*}\left(\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\alpha z^2} dz = 2\int_0^\infty \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}\right)$$

$$A\left[\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{-3/2}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{A = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$\langle v\rangle = \int_0^\infty v f(v)\,dv = \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 e^{-mv^2/2kT}\,dv.$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \overset{**}{=} \quad {}^{**}\ \int_0^\infty z^3 e^{-\alpha z^2} dz = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{1}{2(m/2kT)^2} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\pi}\,\pi^{1/2}}\,\frac{(m/2kT)^2\,(m/2kT)^{-1/2}}{(m/2kT)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\langle v\rangle = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2}}$$

2.3 Η κοινή συνάρτηση κατανομής για τις συνιστώσες της ταχύτητας x, y και z, υ_x υ_y και υ_z, για μόρια αερίων σε ισορροπία είναι ανάλογη $\exp[(-m\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2)/2kT]$. Ποια είναι η κανονικοποιημένη κοινή συνάρτηση κατανομής; Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των συνιστωσών της ταχύτητας; Ποια είναι η κανονικοποιημένη συνάρτηση κατανομής για την x-συνιστώσα της ταχύτητας;Ποιος είναι ο μέσος όρος των υ_x , υ_x και υ_x ; Ποιος είναι ο μέσος όρος των υ_x^2; Ποιος είναι ο μέσος όρος των $m\upsilon_x^2$;

$\boxed{2.3}$ $f(v_x, v_y, v_z) = A\, e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$ 2

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f(v_x,v_y,v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z = 1 \Rightarrow A \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\, dv_x\, dv_y\, dv_z = 1 \Rightarrow$$

$$A\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\, dv\right]^3 = 1 \Rightarrow A\left[\frac{\pi^{1/2}}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}}\right]^3 = 1 \Rightarrow \boxed{A = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}}$$

$$f(v_x,v_y,v_z) = \underbrace{\left\{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\right\}}_{f(v_x)} \underbrace{\left\{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}\right\}}_{f(v_y)} \underbrace{\left\{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}\right\}}_{f(v_z)}$$

και επομένως $\boxed{f(v_x,v_y,v_z) = f(v_x)\, f(v_y)\, f(v_z)}$ Άρα οι v_x, v_y, v_z είναι μη-συσχετισμένες

$$f(v_x) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z)\, dv_y\, dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_y^2+v_z^2)}{2kT}} dv_y\, dv_z$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv}{2kT}} dv\right)^2}_{\left[\frac{\pi^{1/2}}{\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}}\right]^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}}$$

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x f(v_x)\, dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x}_{\to 0} = 0 \Rightarrow \boxed{\langle v_x \rangle = 0}$$

και αναλόγως $\Rightarrow$ $\boxed{\langle v_y \rangle = 0}$ $\boxed{\langle v_z \rangle = 0}$

3

$$\langle m v_x^2 \rangle = m \langle v_x^2 \rangle = m \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(v_x)\, dv_x = m \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x$$

$$= \frac{m^{3/2}}{(2\pi kT)^{1/2}} \frac{\pi^{1/2}}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\langle m v_x^2 \rangle = kT}$$

2.11 $P_i(E_i) = \dfrac{e^{-\beta E_i}}{Q}$, $\quad Q = \sum_i e^{-\beta E_i}$. Υποθέστε ότι σε όλες τις ενέργειες προσθέτουμε τη τιμή E_o.

(α) Υπολογίστε τη νέα Q (απλοποιήστε την εξίσωση όσο το δυνατόν περισσότερο).

(β) Υπολογίστε τη νέα $P_i(E_i)$. Εχει αλλάξει;

$\boxed{2-11}$ (5p+5)

(α) $$Q' = \sum_{i=1}^{N} e^{-\beta(E_i+E_o)} = e^{-\beta E_o}\sum_{i=1}^{N} e^{-\beta E_i} = Q e^{-\beta E_o}$$

(b) $$P_i(E_i+E_o) = \frac{e^{-\beta(E_i+E_o)}}{Q'} = \frac{e^{-\beta E_i}}{Q}\,\frac{\cancel{e^{-\beta E_o}}}{\cancel{e^{-\beta E_o}}} = P_i(E_i)$$

Η πιθανότητα παραμένει αμετάβλητη

2.12 Δίδεται η σχέση $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $-1 < x < 1$.

(α) Υπολογίστε την συνάρτηση $f(E_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right)$, όπου $\frac{E_0}{kT}$ είναι μια σταθερά.

(β) Υπολογίστε τη παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial E_0}$, παραγωποιώντας πρώτα τη συνάρτηση άμεσα, και παραγοποιώντας το αποτέλεσμα της (α), έτσι ώστε να βρείτε μια άλλη έκφραση για τον όρο $\sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right)$.

$$(\alpha)\quad f(E_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right]^n = \frac{1}{1-\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)}$$

$$(\beta)\quad \frac{\partial f(E_0)}{\partial E_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial E_0} \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n}{kT} \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f(E_0)}{\partial E_0} = -\frac{1}{kT} \sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right)$$

$(\alpha) \Rightarrow$

$$\frac{\partial f(E_0)}{\partial E_0} = \frac{d}{dE_0}\left(1-\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right)^{-1} = \frac{\left(-\frac{1}{kT}\right)\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)}{\left[1-\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right]^2}$$

και επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \exp\left(-\frac{nE_0}{kT}\right) = \frac{\exp\left(-E_0/kT\right)}{\left[1-\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right)\right]^2}$$

Αλλαγή μεταβλητών

Η πιθανότητα μιας ιδιότητες παραμένει η ίδια όταν αλλάζουμε μεταβλητές που την περιγράφουν π.χ. αλλάξουμε από την μεταβλητή (x) στη (y).

$$f(x)dx = g(y)dy \qquad \Leftrightarrow \qquad g(y) = f(x)\frac{dx}{dy}$$

Π.χ. Από κατανομή ταχυτήτων να βρούμε την κατανομή κινητικής ενέργειας

$$f(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv = g(E)dE$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \qquad g(E) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{2E}{m}e^{-\frac{E}{kT}}\left(\frac{dv}{dE}\right)$$

$$\frac{dE}{dv} = mv = m\sqrt{\frac{2E}{m}} \Rightarrow \frac{dv}{dE} = \frac{1}{\sqrt{2mE}} \Rightarrow \qquad g(E) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{2E}{m}e^{-\frac{E}{kT}}\frac{1}{\sqrt{2mE}}$$

$$g(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2}\sqrt{E}\,e^{-\frac{E}{kT}}$$

Πολλές μεταβλητές: Μετασχηματισμός Jacobian

$$f(x,y,z)dxdydz = g(r,s,t)drdsdt$$

$$f(x,y,z\ldots) = g(r,s,t\ldots)\frac{\partial(r,s,t)}{\partial(x,y,z)}$$

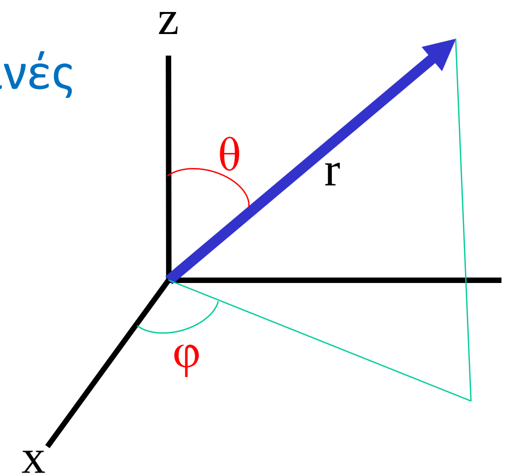
$$drdsdt = dxdydz\frac{\partial(r,s,t)}{\partial(x,y,t)}$$

$$\frac{\partial(r,s,t)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Π.χ. Για την αλλαγή του στοιχείου του όγκου από καρτεσιανές συντεταγμένες σε σφαιρικές έχουμε

$$dxdydz = drd\theta d\varphi\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$



$$\frac{\partial(x,z,y)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\frac{\partial(x,z,y)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$+\sin\theta\cos\varphi\,[r\cos\theta\sin\varphi\cdot 0-(-r\sin\theta\cos\varphi\, r\sin\theta]$$
$$-\sin\theta\sin\varphi[r\cos\theta\cos\varphi\cdot 0-(r\sin\theta\sin\varphi\, r\sin\theta]$$
$$+\cos\theta\,[r\cos\theta\cos\varphi r\sin\theta\cos\varphi-(-r\sin\theta\sin\varphi r\cos\theta\sin\varphi)]=$$

$$+r^2\sin\theta\, sin^2\theta cos^2\varphi + r^2\sin\theta\, sin^2\theta sin^2\varphi +$$
$$r^2\sin\theta\, cos^2\theta cos^2\varphi + r^2\sin\theta\, cos^2\theta sin^2\varphi =$$

$$r^2\sin\theta\,[sin^2\theta cos^2\varphi + sin^2\theta sin^2\varphi + cos^2\theta cos^2\varphi + cos^2\theta sin^2\varphi] =$$

$$r^2\sin\theta\,[sin^2\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi) + cos^2\theta(cos^2\varphi + sin^2\varphi)]$$

$$r^2\sin\theta\,[sin^2\theta + cos^2\theta] = r^2\sin\theta$$

$$dxdydz = drd\theta d\varphi\, r^2\sin\theta$$

Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ

Ας υποθέσουμε ότι έχω μια διαδικασία M_1 η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με n_1 , η διαδικασία M_2 η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με n_2 τρόπους, και γενικά η διαδικασία $M_ι$ μπορεί να πραγματοποιηθεί με $n_ι$ τρόπους τότε ο *συνολικός αριθμός των τρόπων που μπορεί να πραγματοποιηθούν οι διαδικασίες είναι*:

$$\text{Σύνολο}(M_1 M_2 \ldots M_3) = n_1 n_2 \ldots n_i$$

Π.χ. Πόσους τρόπους (συνδυασμούς) μπορούμε να διαλέξουμε 5 τραπουλόχαρτα;

Υπάρχουν 52 τραπουλόχαρτα.
Για το πρώτο φύλλο, $Φ_1$ υπάρχουν n_1=52 επιλογές (τρόποι)
Μένουν 51 τραπουλόχαρτα. Για το δεύτερο $Φ_2$ υπάρχουν n_2 =51 επιλογές.
Μένουν 50 τραπουλόχαρτα. Για το τρίτο $Φ_3$ υπάρχουν n_3 =50 επιλογές
….

$$\text{Σύνολο}(\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5) = n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$$

$$\text{Σύνολο}(\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5) = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311.875.200$$

Διατάξεις (permutations)

Έχω n=11 παίχτες σε μια ομάδα μπάσκετ αλλά ανά πάσα στιγμή μπορώ να παίζου οι j=5. Πόσες «διατάξεις» έχω;

Διαλέγω τον πρώτο παίχτη 1, και έχω 11 επιλογές δηλ. $11 = 11 - 1 + 1$
Μένουν 10. Για τον δεύτερο παίχτη 2, έχω 10 επιλογές δηλ. $10 = 11 - 2 + 1$
Μένουν 9. Για τον τρίτο παίχτη 3, έχω 9 επιλογές δηλ. $9 = 11 - 3 + 1$
Μένουν 8. Για τον τέταρτος παίχτη 4, έχω 8 επιλογές δηλ. $8 = 11 - 4 + 1$
Μένουν 7. Για τον πέμπτος παίχτη 5, έχω 7 επιλογές δηλ. $7 = 11 - 5 + 1$

Επομένως $$\text{Σύνολο}(\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4\Pi_5) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

$$\text{Σύνολο}(\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4\Pi_5) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$\text{Σύνολο}(\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4\Pi_5) = \frac{11!}{(11-5)!}$$

Βλέπουμε ότι εάν έχω n διαφορετικά αντικείμενα και θέλω να τα «διατάξω» με j από αυτά με κάποιον τρόπο

$$P(n,j) = \frac{n!}{(n-j)!} \qquad P \equiv Permutation$$

Διατάξεις (permutations) πανομοιότυπων υποσυνόλων

Εάν σε ένα σύνολο n αντικειμένων, υπάρχουν υποσύνολα n_i τα μέλη των οποίων είναι πανομοιότυπα, δηλ. δεν μπορεί να διακριθούν.

$$n = n_1 + n_2 \dots n_i$$

$$P(n, n_1, n_2 \dots n_i) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_i!}$$

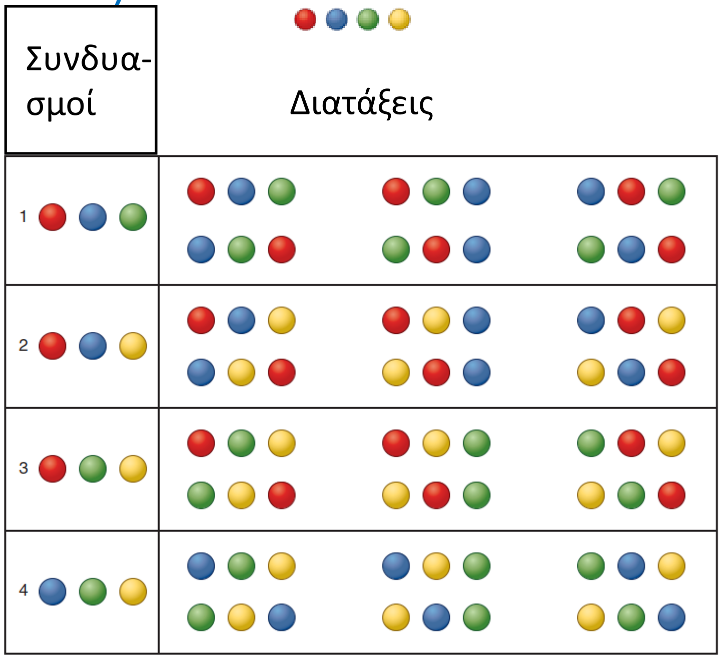
Π.χ. εάν θεωρήσουμε τη λέξη S U C C E S S. Ο συνολικός αριθμός των γραμμάτων είναι

$$7 = 3(\mathrm{S}) + 2(\mathrm{C}) + 1(\mathrm{E}) + 1(\mathrm{U})$$

$$P(SUCCESS, S, C, E, U) = \frac{7!}{3!\, 2!\, 1!\, 1!} = 420$$

Συνδυασμούς (combinations)

Στις «διατάξεις», η «σειρά» των μελών έχει σημασία. Εάν όμως είτε δεν μπορούσαμε να διακρίνουμε την σειρά είτε δεν θέλαμε, τότε μιλάμε για συνδυασμούς (combinations) .



Θεωρούμε 4 σφαιρίδια (n=4) διαφορετικού χρώματος. Ο συνολικός αριθμός των διατάξεων εάν επιλέγαμε τριάδες (j=3) θα ήταν

$$P(4{,}3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Εάν όμως δεν μας ένοιαζε η σειρά των χρωμάτων αλλά μόνο οι συνδυασμοί δηλ. «πόσες διαφορετικές τριάδες» έχω τότε βλέπω ότι έχω 4.

$$C(4{,}3) = \frac{P(4{,}3)}{3!} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4 \qquad C \equiv Combination$$

$$C(n,j) = \binom{n}{j} = \frac{P(n,j)}{j!} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$