7. Έχει ειπωθεί ότι η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης στο άτομο υδρογόνου μπορεί να είναι ακριβώς γνωστή, αλλά ότι οι καταστάσεις διέγερσης έχουν κάποια αβεβαιότητα στις τιμές τους (ένα «ενεργειακό πλάτος»). Συνάδει αυτό με την αρχή της αβεβαιότητας στην μορφή της ενέργειας; Εξηγήστε.

Ναι. Στην ενεργειακή μορφή, η αρχή της αβεβαιότητας είναι $\Delta E \Delta t \geq h/2\pi$. Για την θεμελιώδη κατάσταση, το Δt είναι πολύ μεγάλο, καθώς τα ηλεκτρόνια παραμένουν σε αυτή την κατάσταση για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, οπότε η ΔΕ είναι πολύ μικρή και η ενέργεια του κράτους μπορεί να γίνει ακριβώς γνωστή. Για τα συγκινημένα κράτη, τα οποία μπορούν να αποσυντεθούν στο επίγειο κράτος, Δt είναι πολύ μικρότερο, και ΔΕ αντιστοιχεί μεγαλύτερο. Ως εκ τούτου, η ενέργεια του κράτους είναι λιγότερο γνωστή.

---

10. Αν ξέρατε τη θέση ενός σώματος με ακρίβεια, χωρίς αβεβαιότητα, πόσο καλά θα γνωρίζατε την ορμή του;

10. Αν ξέρατε τη θέση ακριβώς, τότε δεν θα ξέρατε τίποτα για την ορμή.

---

12. Μήπως η αρχή της αβεβαιότητας θέτει ένα όριο στο πόσο καλά μπορείτε να κάνετε οποιαδήποτε ενιαία μέτρηση θέσης;

12. Όχι. Ωστόσο, όσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια της μέτρησης της θέσης, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ορμής του αντικειμένου.

---

14. Η κυματοσυνάρτηση για ένα σωματίδιο σε ένα κουτί είναι μηδέν σε σημεία εντός του κουτιού (εκτός από την περίπτωση που $n = 1$). Μήπως αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου σε αυτά τα σημεία είναι μηδέν; Μήπως αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο δεν μπορεί να περάσει από αυτά τα σημεία; Εξηγήστε.

14. Ναι, η πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου σε αυτά τα σημεία είναι μηδενική. Το σωματίδιο δύναται να περάσει από αυτά τα σημεία. Δεδομένου ότι το σωματίδιο ενεργεί σαν ένα κύμα, αυτά τα σημεία αντιστοιχούν στους κόμβους των στάσιμων κυμάτων μέσα στο κουτί.

---

16. Για ένα σωματίδιο σε ένα πηγάδι άπειρου δυναμικό ο διαχωρισμός μεταξύ των ενεργειακών καταστάσεων αυξάνει καθώς αυξάνει το n (βλ. Εξ. 39.13). Όμως η αρχή της αντιστοιχίας δεν απαιτεί στενότερη απόσταση μεταξύ των καταστάσεων, καθώς αυξάνεται το n, έτσι ώστε να προσεγγίσει μια κλασική (μη κβαντισμένη) κατάσταση; Εξηγήστε.

16. Καθώς αυξάνεται το n, η ενέργεια της αντίστοιχης κατάστασης αυξάνεται, αλλά το ΔΕ/Ε προσεγγίζει το μηδέν. Για το μεγάλο n, η πυκνότητα πιθανότητας ποικίλλει γρήγορα μεταξύ του μηδενός και της μέγιστης τιμής και είναι εύκολα μέσα στο κλασσικό αποτέλεσμα, το οποίο είναι μια ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας για όλα τα σημεία στο πηγάδι.

17. Ένα σωματίδιο παγιδεύεται σε ένα πηγάδι άπειρου δυναμικού. Περιγράψτε τι συμβαίνει στην ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του σωματιδίου και στην κυματοσυνάρτησή του καθώς τα τοιχώματα δυναμικού γίνονται πεπερασμένα και μειώνονται ολοένα μέχρι να φτάσουν τελικά στο μηδέν (παντού $U = 0$).

17. Καθώς μειώνεται το δυναμικό μειώνεται, η κυματοσυνάρτηση επεκτείνεται στην απαγορευμένη περιοχή ως ακολουθώντας φθίνουσα εκθετική συνάρτηση. Όταν το δυναμικό πέφτει κάτω από την ενέργεια των σωματιδίων, η λειτουργία του κύματος έξω από το πηγάδι αλλάζει από μια εκθετική απόσβεση σε ταλάντωση με μεγαλύτερο μήκος κύματος από ότι είχε εντός του πηγαδιού. Όταν το δυναμικό είναι μηδέν, τα μήκη κύματος θα είναι τα ίδια παντού. Η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του μορίου στο πηγάδι γίνεται η ενέργεια του ελεύθερου σωματιδίου.

---

1. (II) Τα νετρόνια σε μια παράλληλη δέσμη έχουν το κάθε ένα κινητική 0,030eV, κατευθύνονται μέσω δύο σχισμών απόστασης 0,60 mm. Πόσο μακριά οι αιχμές παρεμβολής θα βρίσκονται σε ένα πέτασμα 1,0 m μακριά; [*Υπόδειξη*: Αρχικά βρείτε το μήκος κύματος του νετρονίου.]

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}} \ ; \ d\sin\theta = m\lambda,\ m = 1,2,\ldots \ ; \ y = \ell\tan\theta$$

$$\sin\theta = \tan\theta \ \rightarrow \ \frac{m\lambda}{d} = \frac{y}{\ell} \ \rightarrow \ y = \frac{m\lambda\ell}{d},\ m = 1,2,\ldots \ \rightarrow$$

$$\Delta y = \frac{\lambda\ell}{d} = \frac{h\ell}{d\sqrt{2m_0K}} = \frac{(6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})(1.0\,\mathrm{m})}{(6.0\times10^{-4}\,\mathrm{m})\sqrt{2(1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg})(0.030\,\mathrm{eV})(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{J/eV})}}$$

$$= \boxed{2.8\times10^{-7}\,\mathrm{m}}$$

---

6. (I) Η διάρκεια ζωής ενός τυπικής διεγερμένης κατάστασης σε ένα άτομο είναι περίπου 10 ns. Υποθέστε ότι ένα άτομο μεταβαίνει από μια τέτοια διεγερμένη κατάσταση και εκπέμπει ένα φωτόνιο μήκους κύματος περίπου 500nm. Βρείτε το κλάσμα ενεργειακής αβεβαιότητας Δ/ και το μήκος κύματος αβεβαιότητας $\Delta\lambda/\lambda$ αυτού του φωτονίου.

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{h}{2\pi\Delta t} \ ; \ E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\dfrac{h}{2\pi\Delta t}}{\dfrac{hc}{\lambda}} = \frac{\lambda}{2\pi c\Delta t} = \frac{500\times10^{-9}\,\mathrm{m}}{2\pi(3.00\times10^{8}\,\mathrm{m/s})(10\times10^{-9}\,\mathrm{s})} = 2.65\times10^{-8} \approx \boxed{3\times10^{-8}}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \ \rightarrow \ dE = -\frac{hc}{\lambda^2}d\lambda \ \rightarrow \ \Delta E \approx -\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = -\frac{E}{\lambda}\Delta\lambda \ \rightarrow \ \frac{\Delta E}{E} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

The wavelength uncertainty is the absolute value of this expression, and so $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \boxed{3\times10^{-8}}$

13. (II) Ένα ηλεκτρόνιο του υδρογόνου στην κατάσταση $n = 2$ παραμένει εκεί κατά μέσον όρο περίπου 10^{-8} s πριν να μεταβεί στην κατάσταση $n = 1$. α) Εκτιμήστε την αβεβαιότητα στην ενέργεια στην κατάσταση $n = 2$. β) Ποιο κλάσμα της ενέργειας μετάβασης είναι αυτό; (γ) Ποιο είναι το μήκος κύματος, και πλάτος (σε nm), αυτής της γραμμής στο φάσμα του υδρογόνου;

$\boxed{13.}$ (*a*) The minimum uncertainty in the energy is found from Eq. 38-2.

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{(1.055\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})}{(1\times10^{-8}\,\text{s})} = 1.055\times10^{-26}\,\text{J}\left(\frac{1\,\text{eV}}{1.60\times10^{-19}\,\text{J}}\right) = 6.59\times10^{-8}\,\text{eV} \approx \boxed{10^{-7}\,\text{eV}}$$

(*b*) The transition energy can be found from Eq. 37-14b. $Z = 1$ for hydrogen.

$$E_n = -(13.6\,\text{eV})\frac{Z^2}{n^2} \rightarrow E_2 - E_1 = \left[-(13.6\,\text{eV})\frac{1^2}{2^2}\right] - \left[-(13.6\,\text{eV})\frac{1^2}{1^2}\right] = 10.2\,\text{eV}$$

$$\frac{\Delta E}{E_2 - E_1} = \frac{6.59\times10^{-8}\,\text{eV}}{10.2\,\text{eV}} = 6.46\times10^{-9} \approx \boxed{10^{-8}}$$

(*c*) The wavelength is given by Eq. 37-3.

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(6.63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.00\times10^{8}\,\text{m/s})}{(10.2\,\text{eV})\left(\frac{1.60\times10^{-19}\,\text{J}}{\text{eV}}\right)} = 1.22\times10^{-7}\,\text{m} = 122\,\text{nm} \approx \boxed{100\,\text{nm}}$$

Take the derivative of the above relationship to find $\Delta\lambda$.

$$\lambda = \frac{hc}{E} \rightarrow d\lambda = -\frac{hc}{E^2}dE \rightarrow \Delta\lambda = -\frac{hc}{E^2}\Delta E = -\lambda\frac{\Delta E}{E} \rightarrow$$

$$|\Delta\lambda| = \lambda\frac{\Delta E}{E} = (122\,\text{nm})(6.46\times10^{-9}) = 7.88\times10^{-7}\,\text{nm} \approx \boxed{10^{-6}\,\text{nm}}$$

16. (II) Δείξτε ότι η αρχή της υπέρθεσης ισχύει για την χρονικά εξαρτημένη εξίσωση του Schrodinger Δηλαδή δείξτε ότι εάν $\Psi_1(x,t)$ και $\Psi_2(x,t)$ είναι λύσεις, τότε $\Psi_1(x,t) + \Psi_(x,t)$ είναι επίσης μια λύση όπου το και το είναι αυθαίρετες σταθερές.

16. We are given that $\Psi_1(x,t)$ and $\Psi_2(x,t)$ are solutions to the Schrödinger equation. Substitute the function $A\Psi_1(x,t)+B\Psi_2(x,t)$ into the Schrödinger equation.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A\Psi_1+B\Psi_2\right]+U(x)\left[A\Psi_1+B\Psi_2\right]=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2(A\Psi_1)}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2(B\Psi_2)}{\partial x^2}+U(x)A\Psi_1+U(x)B\Psi_2$$

$$=-A\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2}-B\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}+AU(x)\Psi_1+BU(x)\Psi_2$$

$$=A\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2}+U(x)\Psi_1\right)+B\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}+U(x)\Psi_2\right)$$

$$=A\left(i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\right)+B\left(i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\right)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[A\Psi_1+B\Psi_2\right]$$

So, since $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[A\Psi_1+B\Psi_2\right]+U(x)\left[A\Psi_1+B\Psi_2\right]=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[A\Psi_1+B\Psi_2\right]$, the combination $A\Psi_1(x,t)+B\Psi_2(x,t)$ is also a solution to the time-dependent Schrödinger equation.

17. (III) α) Δείξτε ότι η $\Psi(x,t) = Ae^{-i(kx-\omega t)}$ είναι μια λύση της χρονικά εξαρτημένης εξίσωσης του Schrφdinger για ένα ελεύθερο σωματίδιο [$U(x) = U_0$ =constand]

β) Δείξτε ότι η

έγκυρη λύση του μέρους α) ικανοποιεί τη διατήρηση της ενέργειας εάν οι σχέσεις de Broglie ισχύουν $\lambda = h/p, \omega = E/\hbar$ Δηλαδή δείξτε ότι η άμεση αντικατάσταση στην Εξ.. 39.7 δίνει

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2\,m} + U_0.$$

17. (*a*) Substitute $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ into both sides of the time-dependent Schrödinger equation, Eq. 38-7, and compare the functional form of the results.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U_0\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Ae^{i(kx-\omega t)}}{\partial x^2} + U_0 Ae^{i(kx-\omega t)} = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_0\right)Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial Ae^{i(kx-\omega t)}}{\partial t} = \hbar\omega Ae^{i(kx-\omega t)}$$

(*b*) Conservation of energy gives the following result.

$$E = K + U = \frac{p^2}{2m} + U_0 \ ; \ p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi} = \hbar k \ \rightarrow \ \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_0$$

We equate the two results from the valid solution.

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_0\right)Ae^{i(kx-\omega t)} = \hbar\omega Ae^{i(kx-\omega t)} \ \rightarrow \ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_0 = \hbar\omega$$

The expressions are the same.

18. (I) Ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο έχει κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t) = A\sin(2{,}0 \times 10^{10}x)$, όπου το x δίνεται σε μέτρα. Καθορίστε του ηλεκτρονίου α) το μήκος κύματος, β) την ορμή, γ)την ταχύτητα, και δ)την κινητική ενέργεια..

18. The wave function is given in the form $\psi(x) = A\sin kx$.

$$(a) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2.0\times10^{10}\,\text{m}^{-1}} = 3.142\times10^{-10}\,\text{m} \approx \boxed{3.1\times10^{-10}\,\text{m}}$$

$$(b) \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{3.142\times10^{-10}\,\text{m}} = 2.110\times10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m/s} \approx \boxed{2.1\times10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}}$$

$$(c) \quad v = \frac{p}{m} = \frac{2.110\times10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}}{9.11\times10^{-31}\,\text{kg}} = \boxed{2.3\times10^{6}\,\text{m/s}}$$

$$(d) \quad K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(2.110\times10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}\right)^2}{2\left(9.11\times10^{-31}\,\text{kg}\right)}\frac{1}{\left(1.60\times10^{-19}\,\text{J/eV}\right)} = \boxed{15\,\text{eV}}$$

---

19. (I) Γράψτε τη κυματοσυνάρτηση για α) ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο και β) ένα ελεύθερο πρωτόνιο, όπου το κάθε ένα έχει μια σταθερή ταχύτητα $v = 3{,}0 \times 10^5$ m/s.

$\boxed{19.}$ The general expression for the wave function of a free particle is given by Eq. 38-3a. The particles are not relativistic.

$$(a) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{mv}{\hbar} = \frac{\left(9.11\times10^{-31}\text{kg}\right)\left(3.0\times10^{5}\,\text{m/s}\right)}{\left(1.055\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\right)} = 2.6\times10^{9}\,\text{m}^{-1}$$

$$\psi = \boxed{A\sin\left[\left(2.6\times10^{9}\text{m}^{-1}\right)x\right] + B\cos\left[\left(2.6\times10^{9}\text{m}^{-1}\right)x\right]}$$

$$(b) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{mv}{\hbar} = \frac{\left(1.67\times10^{-27}\text{kg}\right)\left(3.0\times10^{5}\,\text{m/s}\right)}{\left(1.055\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\right)} = 4.7\times10^{12}\,\text{m}^{-1}$$

$$\psi = \boxed{A\sin\left[\left(4.7\times10^{12}\,\text{m}^{-1}\right)x\right] + B\cos\left[\left(4.7\times10^{12}\,\text{m}^{-1}\right)x\right]}$$

22. (II) Δείξτε ότι για ένα σωματίδιο σε ένα τέλεια άκαμπτο κουτί, το μήκος κύματος της συνάρτησης κύματος για οποιοδήποτε κατάσταση είναι το μήκος κύματος του de Broglie.

22. We assume the particle is not relativistic. The energy levels are given by Eq. 38-13, and the wave functions are given by Eq. 38-14.

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8m\ell^2} = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p_n = \frac{hn}{2\ell} \; ; \; \psi_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \rightarrow \frac{n\pi}{\ell} = k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \rightarrow$$

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} = \frac{h}{p_n}$$, which is the de Broglie wavelength

---

26. (II) Η μακρύτερη γραμμή μήκους κύματος στο εκπεμπόμενο από ένα ηλεκτρόνιο φάσμα που παγιδεύεται σε ένα απείρως βαθύ τετραγωνικό πηγάδι είναι 610 nm. Ποιο είναι το πλάτος του πηγαδιού;

26. The longest wavelength photon will be the photon with the lowest frequency, and thus the lowest energy. The difference between energy levels increases with high states, so the lowest energy transition is from $n = 2$ to $n = 1$. The energy levels are given by Eq. 38-13.

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1 = \frac{h^2}{8m\ell^2}\left(2^2 - 1^2\right) \rightarrow$$

$$\ell = \sqrt{\frac{3h\lambda}{8mc}} = \sqrt{\frac{3\left(6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}\right)\left(610\times10^{-9}\,\mathrm{m}\right)}{8\left(9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}\right)\left(3.00\times10^{8}\,\mathrm{m/s}\right)}} = \boxed{7.4\times10^{-10}\,\mathrm{m}}$$

---

28. (II) Γράψτε έναν τύπο για τις θέσεις α) των μεγίστων και β) των ελαχίστων μέσα σε $|\psi|^2$ για ένα σωματίδιο στην n-ιοστή σε ένα απείρως βαθύ τετραγωνικό πηγάδι.

28. The wave functions for an infinite square well are given by Eq. 38-14.

$$\psi_n = A\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \; ; \; |\psi_n|^2 = A^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

(*a*) The maxima occur at locations where $|\psi_n|^2 = A^2$.

$$\sin^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = 1 \rightarrow \frac{n\pi}{\ell}x = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\pi,\; m = 0,1,2,\cdots n-1 \rightarrow$$

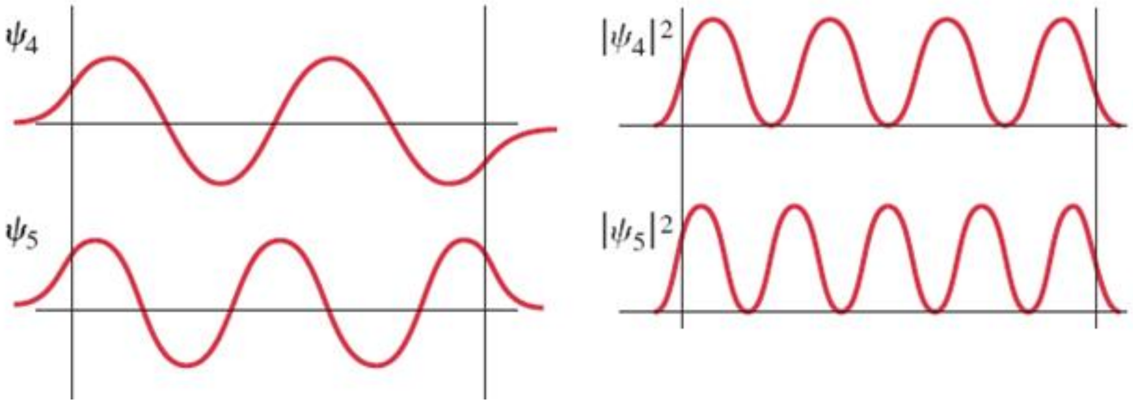
$$\boxed{x_{\max} = \left(\frac{2m+1}{2n}\right)\ell,\; m = 0,1,2,\cdots n-1}$$

The values of m are limited because $x \le \ell$.

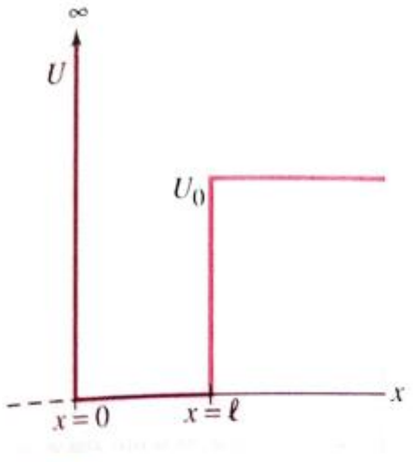
(*b*) The minima occur at locations where $|\psi_n|^2 = 0$.

$$\sin^2\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = 0 \rightarrow \frac{n\pi}{\ell}x = m\pi,\; m = 0,1,2,\cdots n \rightarrow \boxed{x_{\min} = \frac{m}{n}\ell,\; m = 0,1,2,\cdots n}$$

35. (II) Σχεδιάστε τις συναρτήσεις κυμάτων και τις διανομές πιθανότητας για τις $n = 4$ και $n = 5$ καταστάσεις για ένα σωματίδιο που παγιδεύεται σε ένα πεπερασμένο τετραγωνικό πηγάδι.



36. (II) Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο της μάζας μ είναι παγιδευμένο σε ένα πεπερασμένο δυναμικό πηγάδι που έχει ένα άκαμπτο τοίχωμα σε $x = 0$ ($U = \infty$ για $x < 0$) και ένας πεπερασμένο τοίχωμα ύψους $U = U_0$ σε $x = \ell$, Σχ. 38.20. α) Σχεδιάστε τις συναρτήσεις κυμάτων για τις τρεις χαμηλότερες καταστάσεις. β) Ποια είναι η μορφή της συνάρτησης κυμάτων στην θεμελιώδη κατάσταση στις τρεις περιοχές $x < 0$, $0 < x < \ell$, $x > \ell$.



ΣΧΗΜΑ 39.20. Πρόβλημα 36.

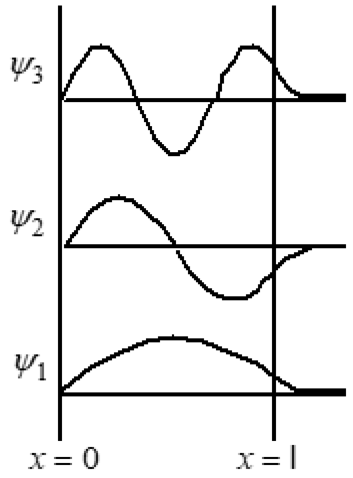
36. (*a*) We assume that the lowest three states are bound in the well, so that $E < U_0$. See the diagrams for the proposed wave functions. Note that, in the well, the wave functions are similar to those for the infinite well. Outside the well, for $x > l$, the wave functions are drawn with an exponential decay, similar to the right side of Figure 38-13.

(*b*) In the region $x < 0$, $\boxed{\psi = 0}$.

In the well, with $0 < x < l$, the wave function is similar to that of a free particle or a particle in an infinite potential well, since $U = 0$.

Thus $\boxed{\psi = A\sin kx + B\sin kx}$, where $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

In the region $x > l$, $\boxed{\psi = De^{-Gx}}$, where $G = \dfrac{\sqrt{2m\left(U_0 - E\right)}}{\hbar}$.



38. (II) Ένα φράγμα δυναμικού έχει ένα ύψος $U_0 = 14$ eV και πάχος $\ell = 0{,}85$ nm. Εάν ο συντελεστής μετάδοσης για ένα προσπίπτων ηλεκτρόνιο είναι 0,00050, ποια είναι η ενέργεια του ηλεκτρονίου;

$$T = e^{-2Gl} \rightarrow G = -\frac{\ln T}{2l} \; ; \; G = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}} = -\frac{\ln T}{2l} \rightarrow$$

$$E = U_0 - \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{\ln T}{2l}\right)^2 = 14\,\text{eV} - \frac{(1.055\times10^{-34}\,\text{J}\bullet\text{s})^2}{2(9.11\times10^{-31}\,\text{kg})}\left(-\frac{\ln(0.00050)}{2(0.85\times10^{-9}\,\text{m})}\right)^2\left(\frac{1}{1.60\times10^{-19}\,\text{J/eV}}\right)$$

$$= 14\,\text{eV} - 0.76\,\text{eV} = 13.24\,\text{eV} \approx \boxed{13\,\text{eV}}$$

---

41. (II) Ένα ηλεκτρόνιο με μια ενέργεια 8,0 eV σε ένα φράγμα δυναμικού ύψους 9,2 eV και πλάτους 0,25 nm. α) Ποια είναι η πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να διέλθει μέσω του φράγματος; β) Ποια είναι η πιθανότητα που το ηλεκτρόνιο να ανακλαστεί;

41. (*a*) The probability of the electron passing through the barrier is given by Eqs. 38-17a and 38-17b.

$$T = e^{-2l\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}}$$

$$2l\,\frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} = 2(0.25\times10^{-9}\,\text{m})\frac{\sqrt{2(9.11\times10^{-31}\,\text{kg})(1.2\,\text{eV})(1.60\times10^{-19}\,\text{J/eV})}}{(1.055\times10^{-34}\,\text{J}\bullet\text{s})} = 2.803$$

$$T = e^{-2.803} = 6.063\times10^{-2} \approx \boxed{6.1\%}$$

(*b*) The probability of reflecting is the probability of NOT tunneling, and so is $\boxed{93.9\%}$.

50. Ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο, επιταχύνονται το κάθε ένα αρχικά από ηρεμία, δια μέσου της ίδιας τάσης. Υποθέτοντας ότι η αβεβαιότητα στη θέση τους δίνεται από το μήκος κύματος τους de Broglie, βρείτε το λόγο της αβεβαιότητας προς στην ορμή τους.

50. We assume that the particles are not relativistic. Conservation of energy is used to find the speed of each particle. That speed then can be used to find the momentum and finally the de Broglie wavelength. We let the magnitude of the accelerating potential difference be V.

$$U_{\text{initial}} = K_{\text{final}} \rightarrow eV = \tfrac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \;;\; \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2eV}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \Delta x$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta p = \frac{2\pi h}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta p_{\text{proton}}}{\Delta p_{\text{electron}}} = \frac{\dfrac{2\pi h}{\Delta x_{\text{proton}}}}{\dfrac{2\pi h}{\Delta x_{\text{electron}}}} = \frac{\Delta x_{\text{electron}}}{\Delta x_{\text{proton}}} = \frac{\dfrac{h}{\sqrt{2m_{\text{electron}}eV}}}{\dfrac{h}{\sqrt{2m_{\text{proton}}eV}}} = \sqrt{\frac{m_{\text{proton}}}{m_{\text{electron}}}} = \sqrt{\frac{1.67\times10^{-27}\,\text{kg}}{9.11\times10^{-31}\,\text{kg}}} = \boxed{43}$$

56. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi(x) = Ae^{ikx}$ όπου το είναι σταθερό και το k δίνεται από την Εξ. 38.11, είναι μια λύση της ανεξάρτητης απ' το χρόνο εξίσωσης Schrodinger για την περίπτωση που $U = 0$.

56. The time independent Schrödinger equation with $U = 0$ is $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$.

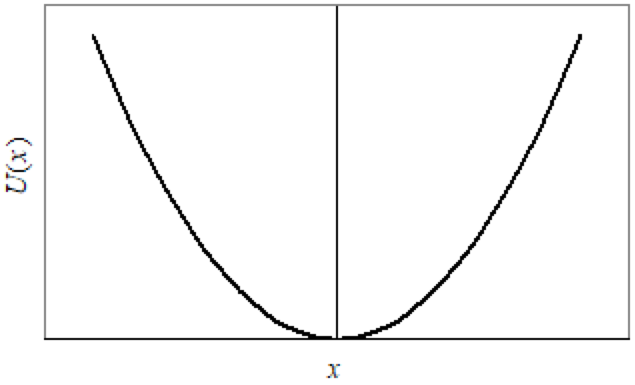
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(Ae^{ikx}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-k^2\right)Ae^{ikx} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi = \frac{\hbar^2\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}\right)^2}{2m}\psi = E\psi$$

We see that the function solves the Schrödinger equation.

52. **Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής**. Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο μάζας m είναι παγιδευμένο όχι σε ένα τετράγωνο πηγάδι, αλλά σε ένα του οποίου η δυναμική ενέργεια είναι αυτή ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή: $U(x) = \frac{1}{2}Cx^2$. Δηλαδή εάν το σωματίδιο μετατοπίζεται από $x = 0$ μια δύναμη αποκατάστασης $F = -Cx$ ενεργεί σε αυτό, όπου το C είναι σταθερό.

α) Σχεδιάστε σε διάγραμμα τη δυναμική ενέργεια. β) Δείξτε ότι η $\psi = Ae^{-Bx^2}$ είναι μια λύση στην εξίσωση Schrodinger και ότι η ενέργεια αυτής της κατάστασης είναι $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, όπου $\omega = \sqrt{C/m}$ (όπως κλασικά, Εξ. 14.5) και $B = m\omega/2\hbar$ [*Σημείωση*: Αυτή είναι η θεμελιώδης κατάσταση και αυτή η ενέργεια $\frac{1}{2}\hbar\omega$ είναι η το σημείο μηδενικής ενέργειας για ένα αρμονικό ταλαντωτή. Οι ενέργειες των υψηλότερων καταστάσεων είναι $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ όπου το n είναι ένας ακέραιος αριθμός.]

52. (*a*) See the diagram.



(*b*) We use the solution $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}$ in the Schrödinger equation.

$$\psi = Ae^{-Bx^2} \; ; \; \frac{d\psi}{dx} = -2ABxe^{-Bx^2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -2ABe^{-Bx^2} - 2ABx\left(-2Bxe^{-Bx^2}\right)$$

$$= 2\left(2Bx^2 - 1\right)ABe^{-Bx^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[2\left(2Bx^2-1\right)ABe^{-Bx^2}\right] + \tfrac{1}{2}Cx^2Ae^{-Bx^2} = EAe^{-Bx^2} \rightarrow$$

$$\left(\frac{\hbar^2 B}{m} - E\right) + \left(\tfrac{1}{2}C - \frac{2\hbar^2B^2}{m}\right)x^2 = 0$$

This is a solution if $\frac{\hbar^2 B}{m} = E$ and $\frac{1}{2}C = \frac{2\hbar^2 B^2}{m}$. Solve these two equations for E in terms of C, and let $\omega \equiv \sqrt{C/m}$.

$$\tfrac{1}{2}C = \frac{2\hbar^2B^2}{m} \rightarrow B = \frac{\sqrt{mC}}{2\hbar} \; ; \; E = \frac{\hbar^2 B}{m} = \frac{\hbar^2}{m}\frac{\sqrt{mC}}{2\hbar} = \tfrac{1}{2}\hbar\sqrt{C/m} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega$$

$$B = \frac{\sqrt{mC}}{2\hbar} = \frac{m}{2\hbar}\sqrt{C/m} = \frac{\omega m}{2\hbar}$$

57. Δείξτε ότι η μέση τιμή του τετραγώνου της θέσης x Ενός σωματιδίου στην κατάσταση n μέσα σε ένα άπειρο πηγάδι δυναμικού πλάτους ℓ είναι $\overline{x^2} = \int x^2 |\psi_n|^2 dx = \ell^2[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}(n\pi)^{-2}]$. Υπολογίστε τις τιμές του $\overline{x^2}$ για $n = 1$ σε 20 και κάνετε μια γραφική παράσταση του $\overline{x^2}$ συναρτήσει του n. [*Υπόδειξη*: Μπορείτε να θελήσετε να συμβουλευθείτε έναν λεπτομερή Πίνακα των ολοκληρωμάτων.]

57. The wave functions for the particle in the infinite well are $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$, as derived in Section 38-8. A table of integrals was consulted to find $\int x^2\left(\sin^2 ax\right)dx$.

$$\overline{x^2} = \int x^2|\psi_n|^2\,dx = \int_0^l x^2\left[\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]^2 dx = \frac{2}{l}\int_0^l x^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

Note that $\int x^2\left(\sin^2 ax\right)dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{1}{8a^3}\right)\sin 2ax - \frac{x\cos 2ax}{4a^2}$.

$$\overline{x^2} = \frac{2}{l}\int_0^l x^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \frac{2}{l}\left\{\frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4\frac{n\pi}{l}} - \frac{1}{8\left(\frac{n\pi}{l}\right)^3}\right)\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x\right) - \frac{x\cos\left(\frac{2n\pi}{l}x\right)}{4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}\right\}_0^l$$

$$= \boxed{l^2\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}(n\pi)^{-2}\right]}$$

58. Εξετάστε ένα σωματίδιο που μπορεί να υπάρξει οπουδήποτε στο χώρο με τη κυματοσυνάρτηση $\psi(x) = b^{-\frac{1}{2}}|x/b|^{\frac{1}{2}}e^{-(x/b)^2/2}$ όπου $b = 1{,}0$ nm. α) Ελέγξτε ότι η συνάρτηση των κυμάτων είναι κανονικοποιημένη. β) Ποια είναι η πιθανότερη θέση για το σωματίδιο μέσα η περιοχή $x > 0$; γ) Ποια είναι η πιθανότητα της εύρεσης του σωματιδίου μεταξύ $x = 0$ nm και $x = 0{,}50$ nm ;

58. (*a*) To check that the wave function is normalized, we calculate $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{b}\left|\frac{x}{b}\right|e^{-\frac{x^2}{b^2}}dx = \frac{2}{b^2}\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{b^2}}dx = \frac{2}{b^2}\left[-\frac{b^2}{2}e^{-\frac{x^2}{b^2}}\right]_0^{\infty} = -(0-1) = 1$$

We see that the function is normalized.

(*b*) The most probable position is that for which $|\psi(x)|^2$ is maximized. That point can be found by solving $\frac{d|\psi(x)|^2}{dx} = 0$ for x. Since we are only considering $x > 0$, we need not use the absolute value signs in the function.

$$\frac{d|\psi(x)|^2}{dx} = \frac{d\left[\frac{x}{b^2}e^{-\frac{x^2}{b^2}}\right]}{dx} = \frac{1}{b^2}e^{-\frac{x^2}{b^2}} + \frac{x}{b^2}\left(-\frac{2x}{b^2}\right)e^{-\frac{x^2}{b^2}} = 0 \;\rightarrow\; 1 = \frac{2x^2}{b^2} \;\rightarrow$$

$$x = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{1.0\text{nm}}{\sqrt{2}} = \boxed{0.71\text{nm}}$$

This value for x maximizes the function, because the function must be positive, and the function is 0 at $x = 0$ and $x = \infty$. Thus this single local extreme point must be a maximum.

(*c*) To find the probability, we integrate the probability density function between the given limits.

$$P = \int_0^{0.50\,\text{nm}}|\psi(x)|^2\,dx = \int_0^{0.50\,\text{nm}}\frac{x}{b^2}e^{-\frac{x^2}{b^2}}dx = \left[-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{b^2}}\right]_0^{0.50\,\text{nm}} = \left(-\tfrac{1}{2}e^{-0.25}\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{0.11}$$