Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών

Πρόχειρες σημειώσεις στις Πιθανότητες

Νίκος Λαζαρίδης

Για το μάθημα 'Εφαρμοσμένα Μαθηματικά' (ΤΕΤΥ 116)

Αναθεώρηση, συμπληρώσεις: Μαρία Καφεσάκη

Κεφάλαιο 1: Η έννοια της πιθανότητας

Περιεχόμενα

Εισαγωγή – Πειράματα τύχης και δειγματοχώροι – Σύνθετα, στοιχειώδη και ασυμβίβαστα γεγονότα – Ορισμός της πιθανότητας (κλασσικός, στατιστικός και αξιωματικός) – Το προσθετικό θεώρημα – Δεσμευμένη πιθανότητα – Θεώρημα ολικής πιθανότητας – Ανεξαρτησία ενδεχομένων – Ιστορικά στοιχεία – Ασκήσεις – Βιβλιογραφία

Εισαγωγή

Η Θεωρία Πιθανοτήτων (ΘΠ) είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τα τυχαία φαινόμενα. Η μελέτη της κέρδισε πολλούς μαθηματικούς, τόσο για το θεωρητικό της ενδιαφέρον όσο και για τις επιτυχημένες εφαρμογές της σε πολλές περιοχές των φυσικών, βιολογικών και κοινωνικών επιστημών, στη μηχανική και στον επιχειρηματικό κόσμο.

Πειράματα τύχης και Δειγματοχώροι

Πολλά φαινόμενα έχουν την ιδιότητα η επανειλλημένη παρατήρησή τους κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες να οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, αν αφήνουμε μια μπάλα που ήταν αρχικά ακίνητη να πέσει από ύψος d μέτρων μέσα σε έναν κύλινδρο χωρίς αέρα, θα φτάνει στο έδαφος πάντα μετά από $t = \sqrt{2d/g}$ δευτερόλεπτα, όπου το g είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/s^2. Αυτά ανήκουν στα λεγόμενα **αιτιοκρατικά φαινόμενα**. Υπάρχουν όμως άλλα φαινόμενα, των οποίων η επανειλλημένη παρατήρηση κάτω από τις ίδιες συνθήκες δεν οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα. Λόγου χάρη, αν ρίξουμε ένα νόμισμα 1000 φορές, οι εμφανίσεις γραμμάτων (Γ) ή κεφαλής (Κ) εναλλάσσονται με έναν φαινομενικά ακανόνιστο και απρόβλεπτο τρόπο. Τέτοιου είδους φαινόμενα τα θεωρούμε ως τυχαία, και ένα πείραμα όπως αυτό που μόλις περιγράφτηκε το ονομάζουμε **πείραμα τύχης (ΠΤ)**. Τα πειράματα τύχης (ΠΤ), ή αλλιώς τυχαία πειράματα, είναι λοιπόν εκείνα για τα οποία η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελούνται απλά καθορίζει ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων για το κάθε πείραμα. Ένα πιό απλό παράδειγμα είναι η ρίψη ενός νομίσματος. Αν και δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, γνωρίζουμε ότι θα είναι Κ ή Γ, θα ανήκει δηλαδή στο σύνολο {Κ, Γ}.

Παρόλο που σε πρώτη ματιά φαίνεται αδύνατο να διατυπώσουμε αξιόλογα συμπεράσματα για τυχαία φαινόμενα, η εμπειρία έχει δείξει ότι πολλά από τα φαινόμενα αυτά παρουσιάζουν μια στατιστική κανονικότητα που αξίζει να μελετηθεί. Π.χ. αν ρίξουμε ένα νόμισμα μία φορά δεν μπορούμε να κάνουμε κάποια μη τετριμμένη πρόβλεψη για το αποτέλεσμα. Αν ρίξουμε όμως το ίδιο νόμισμα πάρα πολλές φορές θα δούμε ότι η συχνότητα εμφανίσης Κ και Γ είναι περίπου η ίδια και άρα το Κ εμφανίζεται περίπου στο 50% των ρίψεων.

Άλλα απλά παραδείγματα πειραμάτων τύχης είναι

α) η ρίψη ενός ζαριού,

β) το τράβηγμα ενός χαρτιού από μιά συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά,

γ) η καταγραφή της διάρκειας ζωής μιάς μπαταρίας ή ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα, δ) η καταγραφή των υψών των ατόμων ενός δοθέντος πληθυσμού,

ε) η επιλογή ενός βόλου από ένα δοχείο το οποίο περιέχει s βόλους, οι οποίοι φέρουν τους αριθμούς 1,2,...,s, αλλά είναι όμοιοι κατά τα άλλα,

στ) ο χρόνος διάσπασης ισοτόπου κάποιου ραδιενεργού στοιχείου, κ.ά.

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται **δειγματοχώρος (ΔΧ)**, και συμβολίζεται με Ω, και τα στοιχεία του λέγονται **δειγματοσημεία** ή απλά σημεία. Έτσι, το κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι ένα σημείο του Ω.

Υπάρχουν ωστόσο πολλοί τρόποι περιγραφής των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. Έτσι, σε δοθέν ΠΤ αντιστοιχούν περισσότεροι του ενός δειγματοχώροι.

> Παράδειγμα 1: Στο ρίξιμο του ζαριού, ένας ΔΧ είναι ο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ʹΕνας άλλος είναι ο Ω' = {άρτιος, περιττός}.

Στο Παράδειγμα 1, καθώς και στο παράδειγμα της ρίψης ενός νομίσματος (όπου ο ΔΧ είναι Ω={Κ,Γ}), οι δειγματοχώροι έχουν πεπερασμένο πλήθος σημείων, και λέγονται **πεπερασμένοι δειγματοχώροι**. Εάν τα σημεία του δειγματοχώρου ενός τυχαίου πειράματος είναι άπειρα, αλλά αριθμήσιμα, δηλ. μπορούν να αντιστοιχισθούν με τους φυσικούς αριθμούς 1,2,3,4,... έναν προς έναν, τότε αυτός λέγεται **άπειρος αριθμήσιμος ΔΧ**. Εάν τα άπειρα σημεία του δειγματοχώρου δεν μπορούν να αντιστοιχισθούν με τους φυσικούς αριθμούς 1,2,3,4,... έναν προς έναν, τότε ο ΔΧ λέγεται **άπειρος μη αριθμήσιμος**.

Ένας πεπερασμένος ή άπειρος αριθμήσιμος ΔΧ λέγεται **διακριτός ΔΧ**, ενώ ένας άπειρος μη αριθμήσιμος ΔΧ λέγεται **συνεχής ΔΧ**.

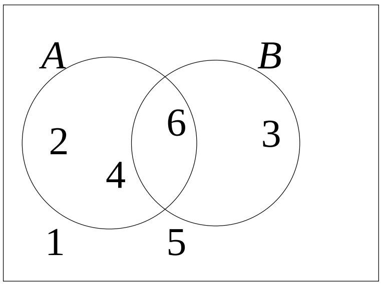
> Παράδειγμα 2: Ο χρόνος που χρειάζεται ένα ισότοπο κάποιου ραδιενεργού στοιχείου για να διασπαστεί μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή, λοιπόν, παίρνουμε ως Ω το διάστημα $[0, \infty)$ στην πραγματική ευθεία.

Σύνθετα, στοιχειώδη και ασυμβίβαστα γεγονότα

Πολλές φορές, σε ένα πείραμα τύχης συμβαίνει να μην ενδιαφέρει αυτό καθαυτό το αποτέλεσμα, αλλά το αν το αποτέλεσμα αυτό ανήκει σε ένα δεδομένο υποσύνολο του Ω, έστω A (π.χ. αν το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού είναι άρτιος ή περιττός αριθμός). Ένα τέτοιο υποσύνολο A του Ω, δηλαδή ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, λέγεται **ενδεχόμενο ή γεγονός**. Εάν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο του A, λέμε ότι συνέβη ή πραγματοποιήθηκε το γεγονός A.

> Παράδειγμα 3: Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Ο ΔΧ του πειράματος αυτού είναι Ω = {1,2,3,4,5,6}. Το γεγονός $A = \{2, 4, 6\}$ αντιστοιχεί στην πρόταση 'το αποτέλεσμα είναι άρτιος'. Η πρόταση 'το αποτέλεσμα διαιρείται ακριβώς με το 3' αντιστοιχεί στο γεγονός $B = \{3, 6\}$.

Μια συνήθης γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης είναι ένα διάγραμμα γνωστό ως **διάγραμμα Venn**. Ένα διάγραμμα Venn (βλ. Σχ. 1) συνήθως συνίσταται από ένα ορθογώνιο, το οποίο αναπαριστά τον ΔΧ του πειράματος, στο



Σχήμα 1: Διάγραμμα Venn για το πείραμα τύχης του Παραδείγματος 3.

οποίο εμπεριέχεται μία ή περισσότερες κλειστές καμπύλες. Το εσωτερικό κάθε καμπύλης αναπαριστά ένα γεγονός.

Ένα γεγονός το οποίο περιλαμβάνει ένα μόνο σημείο του Ω λέγεται **απλό ή στοιχειώδες γεγονός**. Το ίδιο το Ω είναι ένα γεγονός που λέγεται **βέβαιο γεγονός**, επειδή οπωσδήποτε ένα από τα στοιχεία του πραγματοποιείται. Το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι επίσης ένα γεγονός που λέγεται αδύνατο, επειδή κανένα στοιχείο του δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Δύο γεγονότα τα οποία αποκλείονται αμοιβαία, αν δηλαδή συμβεί το ένα αποκλείεται να συμβεί και το άλλο, λέγονται **ασυμβίβαστα γεγονότα**.

Επειδή τα γεγονότα είναι σύνολα, συμπεράσματα που αναφέρονται σε γεγονότα μπορούν να διατυπωθούν στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων και αντίστροφα. Παρακάτω θα υπενθυμίσουμε κάποιες έννοιες, ορισμούς και ιδιότητες από τη Θεωρία Συνόλων που χρησιμοποιούνται συχνά στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Στοιχεία από τη Θεωρία Συνόλων

Ένα **σύνολο** A είναι μια (καλώς) ορισμένη συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Έστω a ένα από τα αντικείμενα αυτά. Το γεγονός ότι το a είναι μέλος του A ή στοιχείο του A ή ότι ανήκει στο A συμβολίζεται με $a \in A$. Η άρνηση του γεγονότος αυτού συμβολίζεται με $a \notin A$. Λέμε ότι το σύνολο B είναι **υποσύνολο** του A ή ότι ανήκει στο A, και γράφουμε $B \subseteq A$, αν για κάθε $a \in B$ ισχύει $a \in A$. Λέμε ότι το B είναι γνήσιο υποσύνολο του A, και γράφουμε $B \subset A$, αν $B \subseteq A$ και υπάρχει a τέτοιο ώστε $a \notin B$. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{a, i, u\}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\{a, e, i, o, u\}$.

Σε ό,τι ακολουθεί θα θεωρούμε ένα βασικό σύνολο Ω το οποίο θα είναι, εν γένει, διαφορετικό σε κάθε πρόβλημα που συναντάμε (θα είναι ο δειγματοχώρος του συγκεκριμένου προβλήματος). Όλα τα υπόλοιπα σύνολα θα είναι υποσύνολα του Ω. Δύο υποσύνολα του Ω, A και B, λέγονται ίσα, και γράφουμε $A = B$, αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Οι σημαντικότερες πράξεις συνόλων είναι οι παρακάτω:

1. **Ένωση**. Το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν ή στο A ή στο B ή και στα δύο λέγεται ένωση των A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$.

2. **Τομή**. Το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν και στο A και στο B λέγεται τομή των A και B και συμβολίζεται με $A \cap B$.

   Δύο σύνολα A και B για τα οποία $A \cap B = \emptyset$ λέγονται **ξένα σύνολα**.

3. **Διαφορά**. Το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B λέγεται διαφορά των A και B και συμβολίζεται με $A - B$.

4. **Συμπλήρωμα**. Εάν $B \subset A$, τότε το $A - B$ λέγεται συμπλήρωμα του B ως προς το A, και συμβολίζεται με B_A^c. Εάν $A = \Omega$, το $\Omega - B$ λέγεται απλά συμπλήρωμα του B και συμβολίζεται με B^c.

Παραθέτουμε τώρα μερικές βασικές ιδιότητες των πράξεων μεταξύ συνόλων.

1. $\Omega^c = \emptyset, \;\; \emptyset^c = \Omega, \;\; (A^c)^c = A.$
2. $\Omega \cup A = \Omega, \;\; \emptyset \cup A = A, \;\; A \cup A^c = \Omega, \;\; A \cup A = A.$
3. $\Omega \cap A = A, \;\; \emptyset \cap A = \emptyset, \;\; A \cap A^c = \emptyset, \;\; A \cap A = A.$

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι προφανείς, όπως επίσης είναι και η ιδιότητα $\emptyset \subseteq A$ για κάθε υποσύνολο A του Ω. Επίσης, έχουμε

4. τους αντιμεταθετικούς νόμους,

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= A_2 \cup A_1 \\ A_1 \cap A_2 &= A_2 \cap A_1, \end{aligned}$$

5. τους προσεταιριστικούς νόμους,

$$\begin{aligned} A_1 \cup (A_2 \cup A_3) &= (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \\ A_1 \cap (A_2 \cap A_3) &= (A_1 \cap A_2) \cap A_3, \end{aligned}$$

6. και τους επιμεριστικούς νόμους,

$$\begin{aligned} A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) &= \bigcup_{j=1}^{n} (A \cap A_j) \\ A \cup \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j \right) &= \bigcap_{j=1}^{n} (A \cup A_j), \end{aligned}$$

όπου $\bigcup_{j=1}^n A_j = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, και $\bigcap_{j=1}^n A_j = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

Έτσι, εάν A και B είναι δύο γεγονότα, τότε
$A \cup B$ είναι το γεγονός (που αντιστοιχεί στην πρόταση) 'ή A ή B ή και τα δύο',
$A \cap B$ είναι το γεγονός 'και A και B',
A^c είναι το γεγονός 'όχι A', και
$A - B$ είναι το γεγονός 'A αλλά όχι και B'.
Αν τα σύνολα που αντιστοιχούν στα γεγονότα A και B είναι ξένα, τότε τα γεγονότα αυτά είναι ασυμβίβαστα.

Μέχρι στιγμής περιγράψαμε πειράματα τύχης και συζητήσαμε τα πιθανά αποτελέσματά τους ή γεγονότα. Δεν αναφέραμε τίποτα για τη σχετική συχνότητα ή πιθανότητα εμφάνισης κάθε αποτελέσματος, πράγμα το οποίο θα κάνουμε στο επόμενο εδάφιο. Στο επόμενο εδάφιο, σε κάθε γεγονός A θα αντιστοιχίσουμε μια αριθμητική ποσότητα, $P(A)$, η οποία θα κληθεί πιθανότητα του A, δηλ. πιθανότητα να συμβεί το γεγονός A.

Ορισμός της Πιθανότητας

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό της πιθανότητας, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα περισσότερα από τα πειράματα τύχης δείχνουν κάποια κανονικότητα. Με αυτό εννοούμε ότι η σχετική συχνότητα ενός γεγονότος είναι προσεγγιστικά η ίδια σε κάθε περίπτωση που πραγματοποιείται ένα σύνολο δοκιμών, δηλαδή ένα σύνολο επαναλήψεων ενός δεδομένου πειράματος τύχης. Η κανονικότητα αυτή είναι ο λόγος που γίνεται δυνατός ο ορισμός της πιθανότητας.

Υπάρχουν δύο αξιοσημείωτες μέθοδοι για τον ορισμό (ουσιαστικά την εκτίμηση) της πιθανότητας ενός γεγονότος. Θα τους παρουσιάσουμε ξεκινώντας με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4: Ρίψη ενός ζαριού.

Στο πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού, ο ΔΧ είναι το σύνολο των αριθμών $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Αν ορίσουμε με A το γεγονός 'το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι αριθμός άρτιος', τότε το γεγονός A θα περιλαμβάνει τα σημεία $\{2, 4, 6\}$.

Έστω ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα ρίψης ζαριού n φορές, και συμβολίζουμε με $N_n(1)$ το πλήθος εκείνων από τις n δοκιμές στις οποίες το αποτέλεσμα της ρίψης ήταν 1, με $N_n(2)$ το πλήθος εκείνων όπου το αποτέλεσμα ήταν 2, κ.ο.κ.

Το ποσοστό των εμφανίσεων των αποτελεσμάτων 1, 2, ..., 6, είναι λοιπόν

$$\frac{N_n(1)}{n}, \quad \frac{N_n(2)}{n}, ..., \quad \frac{N_n(6)}{n}.$$

Καθώς το πλήθος των δοκιμών αυξάνεται, θα περιμέναμε τα παραπάνω πηλίκα, τα οποία λέγονται και σχετικές συχνότητες των $1, 2, ..., 6$, αντίστοιχα, να σταθεροποιούνται σε κάποιους αριθμούς $p_1, p_2, ..., p_6$, οι οποίοι σύμφωνα με τη διαίσθησή μας θα πρέπει να είναι όλοι ίσοι με $1/6$ στην περίπτωση αυτή.

Δεδομένου ότι το γεγονός A περιλαμβάνει τα σημεία $\{2, 4, 6\}$, μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό ότι η σχετική συχνότητα του γεγονότος A θα είναι το άθροισμα

$$\frac{N_n(2)}{n} + \frac{N_n(4)}{n} + \frac{N_n(6)}{n} = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{3}{6}.$$

Ο απλούστερος ορισμός της πιθανότητας $P(A)$ είναι ο γνωστός ως **κλασσικός ορισμός**, και έχει τις ρίζες του στα τυχερά παιχνίδια. Σύμφωνα με αυτόν, η πιθανότητα ενός γεγονότος A ορίζεται ως

$P(A)$ = (πλήθος σημείων του γεγονότος A)/ (πλήθος σημείων του Ω).

Περιφραστικά, η πιθανότητα ενός γεγονότος A είναι το πηλίκο των διαφόρων τρόπων με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί το A (των ¨ευνοικών¨ περιπτώσεων για το A) δια του πλήθους των δειγματοσημείων του Ω.

Για να ισχύει όμως ο κλασσικός ορισμός, θα πρέπει να υπάρχουν οι εξής προυποθέσεις:

(1) το πείραμα τύχης που μελετάμε να έχει πεπερασμένο δειγματοχώρο.

(2) όλα τα απλά (στοιχειώδη) γεγονότα να έχουν την ίδια ακριβώς δυνατότητα (ευκαιρία) να συμβούν.

Ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας παρουσιάζει αδυναμίες. Κατ' αρχήν χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως 'ίδιες δυνατότητες' ή 'ίδιες ευκαιρίες', οι οποίες δεν μπορούν να ορισθούν επαρκώς από μαθηματικής πλευράς, αλλά επαφίενται στη διαίσθηση. Επίσης, συχνά εμφανίζονται στην πράξη δειγματοχώροι Ω με άπειρο πλήθος στοιχείων, οπότε η προυπόθεση (1) δεν συντρέχει.

Παράδειγμα 5: Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει κεφάλι (Κ) σε μιά ρίψη νομίσματος;

Υπάρχουν δύο εξίσου πιθανά αποτελέσματα, Κ και Γ, και επειδή το ευνοικό αποτέλεσμα είναι ένα από αυτά (Κ), συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα να έρθει Κ σε μιά ρίψη είναι 1/2 .

Παράδειγμα 6: Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει κεφάλι (Κ) στην πρώτη ρίψη και γράμματα (Γ) στη δεύτερη;

Εδώ Ω ={ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ}, ενώ το σύνολο που αντιστοιχεί στο γεγονός που περιγράφηκε είναι το {ΚΓ}, οπότε P(ΚΓ)=1/4.

Παράδειγμα 7: Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει 4; Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει άρτιος;

Ο ΔΧ του προβλήματος είναι ο Ω =$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Έστω A και B τα ενδεχόμενα 'να έρθει 4' και 'να έρθει άρτιος', αντίστοιχα. Τότε $A = \{4\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$, οπότε $P(A) = 1/6$ και $P(B) = 3/6 = 1/2$.

Ένας άλλος ορισμός της πιθανότητας ο οποίος δεν θέτει περιορισμούς στον ΔΧ Ω είναι εκείνος που βασίζεται στην έννοια της σχετικής συχνότητας, και ο οποίος βασίζεται σε πολλές επαναλήψεις ενός δεδομένου πειράματος τύχης. Θεωρήστε έναν οποιονδήποτε δειγματοχώρο Ω ο οποίος αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο πείραμα τύχης, και έστω A ένα γεγονός. Το εν λόγω πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται n φορές, και έστω $N_n(A)$ ο αριθμός των φορών που πραγματοποιείται το γεγονός A. Ο αριθμός $N_n(A)$ λέγεται συχνότητα του Α, και το πηλίκο $N_n(A)/n$ σχετική συχνότητα του A.

Θεωρούμε την ακολουθία των σχετικών συχνοτήτων του A, $\{N_n(A)/n\}$, με $n \geq 1$, και υποθέτουμε ότι καθώς $n \to \infty$ υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty}(N_n(A)/n)$. Το όριο αυτό ορίζεται ως η πιθανότητα του A, $P(A)$. Ο ορισμός αυτός είναι γνωστός ως **στατιστικός ορισμός**, και ικανοποιεί την αντίληψη που διαισθητικά έχει κανείς για την έννοια της πιθανότητας.

Αδυναμίες παρουσιάζει και αυτός ο ορισμός, που σχετίζονται με την απαίτηση του πολύ μεγάλου n. Αποφεύγουμε τις αδυναμίες των δύο παραπάνω ορισμών με τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας (Kolmogorov), ο οποίος είναι προιόν μακροχρόνιων και διαδοχικών βελτιώσεων προγενέστερών του ορισμών. Ενσωματώνει και επεκτείνει τις ιδιότητες του κλασσικού και του στατιστικού ορισμού, και προσφέρεται για τη σε βάθος μαθηματική μελέτη της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Αν και δεν θα αναλύσουμε εδώ αυτόν τον ορισμό, αναφέρουμε επιγραμματικά τις ιδιότητες/αξιώματα μέσω των οποίων ορίζεται η πιθανότητα:

(i) $P(\Omega) = 1$.

(ii) $P(A) \geq 0$.

(iii) Αν A_j, $j = 1, 2, 3, ...$, είναι ξένα ανά δύο σύνολα, τότε

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

Παράδειγμα 8: Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Θεωρήστε τα γεγονότα $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ και $\Gamma = \{3, 4\}$, τα οποία είναι υποσύνολα του δειγματοχώρου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του προβλήματος. Ποια η πιθανότητα των γεγονότων $A \cup B$ και $A \cup \Gamma$;

Τα A και B είναι ξένα, καθώς και τα A και Γ. Από το αξίωμα (iii) του τελευταίου ορισμού της πιθανότητας, έχουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/6 + 3/6 = 5/6$, και $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) = 2/6 + 2/6 = 2/3$.

Παράδειγμα 9: Βγάζουμε στην τύχη μία σφαίρα από ένα κουτί που περιέχει 6 κόκκινες, 4 άσπρες και 5 μπλέ σφαίρες, κατά τα άλλα όμοιες. Ποια είναι η πιθανότητα να βγει σφαίρα α) κόκκινη, β) άσπρη, γ) μπλε, δ) όχι κόκκινη, ε) κόκκινη ή άσπρη;

α) Συμβολίζουμε με K, A, και M τα γεγονότα να βγει κόκκινη, άσπρη, και μπλέ σφαίρα, αντίστοιχα. Ο ΔΧ του πειράματος περιέχει 15 σημεία. Εάν το καθένα έχει πιθανότητα 1/15, έχουμε ότι $P(K) = 6/15$, επειδή το γεγονός K περιέχει 6 σημεία του ΔΧ.

β) Με το ίδιο σκεπτικό, $P(A) = 4/15$, και

γ) $P(M) = 5/15$.

δ) Η πιθανότητα να μη βγει κόκκινη σφαίρα είναι ίση με την πιθανότητα να βγει άσπρη ή μπλε. Έτσι, $P(\text{όχι } K) = P(A \text{ ή } M) = P(A \cup M)$. Επειδή όμως τα γεγονότα A και M είναι ασυμβίβαστα, θα έχουμε ότι $P(A \cup M) = P(A) + P(M) = 4/15 + 5/15 = 3/5$.

ε) Το γεγονός 'K ή A' παριστάνεται από την ένωση των γεγονότων K και A, $K \cup A$. Αλλά αφού τα K και A είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(K \cup A) = P(K) + P(A) = 6/15 + 4/15 = 2/3$.

Άλλες Ιδιότητες της Πιθανότητας

Θα αποδείξουμε τώρα κάποιες επιπλέον ιδιότητες της συνάρτησης πιθανότητας P, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της, και χρησιμοποιούνται ευρέως στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

1. Το αδύνατο γεγονός έχει πιθανότητα μηδέν, δηλαδή $P(\emptyset) = 0$.

   Απόδειξη: Αφού $\Omega = \Omega + \emptyset$, τότε $P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$. Από τον ορισμό της P έχουμε όμως ότι $P(\Omega) = 1$ και $P(\emptyset) \geq 0$. Οπότε $P(\emptyset) = 0$.

2. Το συμπλήρωμα A^c ενός γεγονότος A έχει πιθανότητα $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   Απόδειξη: Από την ιδιότητα $A \cup A^c = \Omega$ και την ιδιότητα iii έχουμε $P(A \cup A^c) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.

3. Μια οποιαδήποτε συνάρτηση πιθανότητας P είναι μη φθίνουσα, δηλαδή $A_1 \subseteq A_2$ συνεπάγεται $P(A_1) \leq P(A_2)$.

   Απόδειξη: Προφανώς $A_2 = A_1 + (A_2 - A_1)$. Από την ιδιότητα iii της P έχουμε τότε $P(A_2) = P(A_1 + (A_2 - A_1)) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)$. Επειδή $P(A_2 - A_1) \geq 0$, προκύπτει ότι $P(A_1) \leq P(A_2)$.

4. Για οποιοδήποτε γεγονός ισχύει $0 \le P(A) \le 1$.

   Απόδειξη: Πράγματι, αφού $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$, από την ιδιότητα 3 θα έχουμε $P(\emptyset) \le P(A) \le P(\Omega)$. Αλλά $P(\emptyset) = 0$ και $P(\Omega) = 1$, οπότε παίρνουμε $0 \le P(A) \le 1$.

   Παράδειγμα 10: Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να βγει το άθροισμα της πρώτης και της δεύτερης ρίψης διάφορο από 7 και 11.

   Ο δειγματοχώρος του προβλήματος είναι

$$\begin{array}{rllllll} \Omega = & \{(1,1) & (1,2) & (1,3) & .. & .. & (1,6) \\ & (2,1) & (2,2) & (2,3) & .. & .. & (2,6) \\ & ...... & .... & ...... & ... & ... & ..... \\ & (6,1) & (6,2) & ..... & .. & .. & (6,6)\} \end{array}$$

   όπου λόγου χάρη το σημείο (5,2) παριστάνει το γεγονός ¨5 το πρώτο ζάρι και 2 το δεύτερο¨.

   Αν A είναι το γεγονός 'άθροισμα 7 ή 11', τότε υπάρχουν οκτώ ευνοικά αποτελέσματα για το γεγονός αυτό. Αν δεχτούμε ότι τα απλά αυτά γεγονότα έχουν ίσες πιθανότητες, τότε καθένα από αυτά έχει πιθανότητα 1/36. Τότε, αφού το A περιέχει 8 τέτοια απλά γεγονότα, $P(A) = 8/36 = 2/9$. Άρα η πιθανότητα να μην έχουμε άθροισμα 7 ή 11 είναι $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 2/9 = 7/9$.

Το Προσθετικό Θεώρημα

Το αξίωμα (iii) του ορισμού της πιθανότητας μας λέει ότι αν τα σύνολα A και B είναι ξένα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Αν τα A και B δεν είναι αναγκαστικά ξένα, τότε ισχύει.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1}$$

Η εξ. (1) μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητή, επικαλούμενοι τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας και παρατηρώντας ότι το σύνολο $A \cup B$ έχει πλήθος στοιχείων το άθροισμα των στοιχείων των A και B, μείον τα στοιχεία της τομής $A \cap B$, τα οποία στο παραπάνω άθροισμα καταμετρήθηκαν δύο φορές.

Η γενίκευσή της (1) για οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό συνόλων (υποσυνόλων του Ω) είναι το λεγόμενο προσθετικό θεώρημα:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \quad &+ \quad (-1)^{2+1} \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2}) \\ &+ \quad (-1)^{3+1} \sum_{1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}) \\ &+ \quad \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος γίνεται επαγωγικά.

Για $n = 3$ το προσθετικό θεώρημα δίνει

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & \quad P(A) + P(B) + P(C) \\ & - \; P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) \\ & + \; P(A \cap B \cap C). \end{aligned} \tag{3}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Θεωρούμε δύο γεγονότα A και B με $P(A) > 0$, και θέτουμε το εξής ερώτημα: Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί το B, δεδομένου ότι συνέβη (πραγματοποιήθηκε) το A. Για να απαντήσουμε, πρέπει πρώτα να δώσουμε τον ακριβή ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με δεδομένο κάποιο άλλο.

Ορισμός: Έστω A και B δύο ενδεχόμενα τέτοια ώστε $P(A) > 0$. Τότε η **δεσμευμένη πιθανότητα** του B με δεδομένο το A, η οποία συμβολίζεται με $P(B|A)$, ορίζεται από τη σχέση

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}. \tag{4}$$

Αν $P(A) = 0$, τότε η $P(B|A)$ δεν ορίζεται. (Η σχέση (4), γραμμένη ισοδύναμα ως $P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$, μπορεί να μεταφραστεί ως 'η πιθανότητα να συμβεί και το A και το B είναι ίση με την πιθανότητα να συμβεί το A επί την πιθανότητα να συμβεί το B δεδομένου του ότι συνέβη το A').

Η $P(B|A)$ λέγεται επίσης και πιθανότητα υπό συνθήκη του B δεδομένου του A. Το νόημα της εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας είναι η παροχή δυνατότητας ενσωμάτωσης τυχόν διαθέσιμων πληροφοριών κατά τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός γεγονότος.

Στην πράξη, αν γνωρίζουμε ότι το A έχει πραγματοποιηθεί, τότε αυτό αντικαθιστά το Ω στον υπολογισμό της πιθανότητας του B, δηλαδή η δεσμευμένη πιθανότητα του B $P(B|A)$ είναι στην ουσία η πιθανότητα του B στον δειγματοχώρο A. Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του $P(B|A)$.

Συνοψίζοντας: Ο υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας $P(B|A)$ μπορεί να γίνει είτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό (4) είτε υπλογίζοντας την πιθανότητα του B στον νέο δειγματοχώρο A.

Παράδειγμα 11: Διαλέγουμε στην τύχη μια οικογένεια με δύο παιδιά, από ένα σύνολο τέτοιων οικογενειών. Ο ΔΧ αυτού του πειράματος τύχης, όσον αφορά το φύλο των παιδιών, είναι Ω = {ΑΑ, ΑΚ,ΚΑ,ΚΚ}, όπου λόγου χάρη, ΑΚ είναι το σημείο που σημαίνει ότι το πρώτο παιδί είναι αγόρι και το δεύτερο κορίτσι.
(α) Ποια είναι η πιθανότητα η οικογένεια αυτή να έχει δύο αγόρια;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα η οικογένεια αυτή να έχει δύο αγόρια αν γνωρίζουμε ότι ένα από τα παιδιά είναι αγόρι;

Έστω B το γεγονός 'η οικογένεια έχει δύο αγόρια' και A το γεγονός 'ένα από τα παιδιά αγόρι'. Τότε το B περιέχει το δειγματοσημεία B={ΑΑ} και το A τα σημεία A={ΑΑ, ΚΑ, ΑΚ}.

(α) Λαμβάνοντας υπόψη τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, βλέπουμε ότι η πιθανότητα του B είναι $P(B) = 1/4$.

(β) Με δεδομένο ότι ένα από τα παιδιά είναι αγόρι, ο ΔΧ του πειράματος τύχης είναι πλέον ο A = {ΑΑ, ΑΚ, ΚΑ}. Η πιθανότητα του B στον νέο ΔΧ είναι $P(B) = 1/3$, σύμφωνα και με τη σχέση (4) (σημειώστε ότι $P(B \cap A) = P(B)$, αφού $B \subset A$).

Παράδειγμα 12: Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός κάποιας πόλης είναι 40% άνδρες και 60% γυναίκες. Υποθέτουμε ακόμη ότι το 50% των ανδρών και το 30% των γυναικών είναι καπνιστές. Να βρεθεί η πιθανότητα ένας καπνιστής να είναι άνδρας.

Συμβολίζουμε με A (Γ) το ενδεχόμενο να επιλέξουμε άνδρα (γυναίκα), και K (Λ) το ενδεχόμενο να επιλέξουμε καπνιστή (μη καπνιστή). Η πληροφορία που μας δόθηκε είναι ότι

$$P(K|A) = 0.5, \quad P(K|\Gamma) = 0.3, \quad P(A) = 0.4 \;\; \& \;\; P(\Gamma) = 0.6.$$

Το πρόβλημα είναι να υπολογιστεί η $P(A|K)$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε ότι

$$P(A|K) = \frac{P(A \cap K)}{P(K)}.$$

Για τον υπολογισμό του αριθμητή παρατηρούμε ότι

$$P(A \cap K) = P(K \cap A) = P(A)P(K|A) = (0.4)(0.5) = 0.2.$$

Για τον υπολογισμό του παρονομαστή παρατηρούμε ότι το K είναι η ένωση των ξένων συνόλων $K \cap A$ και $K \cap \Gamma$, οπότε

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K \cap A) + P(K \cap \Gamma) = P(A)P(K|A) + P(\Gamma)P(K|\Gamma) \\ &= 0.2 + (0.6)(0.3) = 0.38. \end{aligned}$$

Επομένως, $P(A|K) = 0.2/0.38 \simeq 0.53$.

Θα παρατηρήσατε ότι ο ΔΧ δεν αναφέρθηκε ποτέ σαφώς σε αυτό το παράδειγμα. Ωστόσο είναι πολύ εύκολο να κατασκευαστεί.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Στενά συνδεδεμένα με την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας είναι το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

Υποθέτουμε ότι $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι n ξένα ανά δύο ενδεχόμενα των οποίων η ένωση ισούται με το Ω, είναι δηλαδή μια **διαμέριση**, όπως λέγεται, του Ω. Υποθέτουμε επίσης ότι είναι γνωστές οι πιθανότητες $P(B|A_k)$ και $P(A_k)$ για $1 \leq k \leq n$. Τότε αν B είναι ένα ενδεχόμενο του Ω, ποια είναι η $P(B)$· Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα παρατηρούμε ότι αφού τα A_k είναι μια διαμέριση του Ω, θα είναι

$$B = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k).$$

Άρα, η προσθετική ιδιότητα της πιθανότητας δίνει $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$. ′Ομως $P(B \cap A_k) = P(B|A_k)P(A_k)$, οπότε έχουμε τελικά

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k). \tag{5}$$

Η σχέση (5) είναι το **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**.

Ανεξαρτησία γεγονότων

Για δύο γεγονότα A και B, με $P(A) > 0$, ορίσαμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του Β δεδομένου του Α, $P(B|A)$. Συγκρίνοντας τώρα τις πιθανότητες $P(B|A)$ και $P(B)$, είναι δυνατόν να ισχύει μία από τις τρεις σχέσεις:

$$P(B|A) > P(B), \;\; P(B|A) = P(B), \;\; P(B|A) < P(B).$$

Το ποια από αυτές θα ισχύει, καθορίζεται από τις επιλογές των A και B.

Στην περίπτωση που είναι $P(B|A) = P(B)$, λέμε ότι το γεγονός B είναι ανεξάρτητο[1] (στοχαστικά ή στατιστικά ή υπό την έννοια της πιθανότητας) από το γεγονός A. Δηλαδή, η γνώση του ότι το γεγονός A πραγματοποιήθηκε δεν δίνει καινούριες πληροφορίες για την επανεκτίμηση της πιθανότητας του γεγονότος B. Αν τώρα υποθέσουμε ότι και $P(B) > 0$, τότε το ότι το B είναι ανεξάρτητο του A συνεπάγεται και το ότι το A είναι ανεξάρτητο του B.

Πράγματι,

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B)P(A)}{P(B)} = P(A).$$

Λόγω της συμμετρίας αυτής, λέμε ότι τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα. Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, που έχει έννοια ακόμα κι αν $P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό της ανεξαρτησίας γεγονότων:

Ορισμός: Δύο γεγονότα A_1 και A_2 λέγονται (στοχαστικά ή στατιστικά ή υπό την έννοια της πιθανότητας) ανεξάρτητα, αν $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Πιο γενικά, λέμε ότι $n \geq 3$ γεγονότα $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι ανεξάρτητα, αν

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n),$$

και οποιοδήποτε υποσύνολό τους που περιέχει τουλάχιστον δύο αλλά λιγότερα από n ενδεχόμενα, αποτελείται από ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Παράδειγμα 14: Θεωρούμε ένα δοχείο που περιέχει 4 πανομοιότυπους βόλους, εκτός του ότι είναι αριθμημένοι από το 1 ως το 4. Θέτουμε $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, και υποθέτουμε ότι η πιθανότητα κάθε σημείου του Ω είναι 1/4. Αποφασίστε για το αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα, όταν

α) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, και

β) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$.

α) Προφανώς είναι $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, και $P(A \cap B) = P(\{1\}) = 1/4$. Επομένως

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(B),$$

άρα τα A και B είναι ανεξάρτητα.

[1] Δεν πρέπει να συγχέονται τα στατιστικά ανεξάρτητα γεγονότα με τα ασυμβίβαστα γεγονότα.

β) Προφανώς είναι $P(A) = 3/4$, $P(B) = 3/4$, και $P(A \cap B) = P(\{1, 2\}) = 1/2$. Επομένως

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} \neq \frac{3}{4} = P(B).$$

Άρα τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

Τελειώνουμε το κεφάλαιο αυτό με μερικά σχόλια που αφορούν πειράματα τύχης των οποίων ο δειγματοχώρος είναι άπειρος. Σε τέτοια περίπτωση, ο ορισμός της πιθανότητας διαφόρων ενδεχομένων εξαρτάται από το αν ο ΔΧ είναι αριθμήσιμος ή όχι. Μη αριθμήσιμοι δειγματοχώροι απαιτούν εν γένει την εισαγωγή νέων εννοιών. Αν όμως ο ΔΧ είναι αριθμήσιμος, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας σύμφωνα με τον αξιωματικό ορισμό που δώσαμε, αρκεί να μην ορίσουμε ίση πιθανότητα για κάθε στοιχειώδες γεγονός του Ω. Ο περιορισμός αυτός προκύπτει από την απαίτηση σύγκλισης του άπειρου αθροίσματος του αξιώματος (iii).

Παράδειγμα 15: Πίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να έρθει κεφάλι (Κ). Έστω ότι το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ο αριθμός των ρίψεων που χρειάστηκαν μέχρι να έρθει Κ. Τότε ο ΔΧ του πειράματος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Η πιθανότητα να έρθει Κ σε μιά ρίψη είναι 1/2. Η πιθανότητα να έρθει γράμματα (Γ) στην πρώτη ρίψη και Κ στη δεύτερη ρίψη είναι 1/4. Η πιθανότητα να έρθει Γ στις δύο πρώτες ρίψεις και Κ στην τρίτη είναι 1/8, κ.ο.κ. Αυτό μας υποβάλλει την ιδέα να αντιστοιχίσουμε πιθανότητα $1/2^n$ στο στοιχειώδες γεγονός n του Ω.

Συμβολίζοντας με A_n το σημείο n του Ω, από το αξίωμα (ιιι) έχουμε

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Το παραπάνω άθροισμα υπολογίζεται με τη βοήθεια της ταυτότητας που δίνει το άπειρο άθροισμα μιάς γεωμετρικής σειράς:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ταυτότητα με r, και θέτοντας $r = 1/2$, παίρνουμε $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$. Αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, οπότε $P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\Omega) = 1$, όπως πρέπει για μιά συνάρτηση πιθανότητας.

Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει πρώτη φορά Κ μετά από άρτιο αριθμό ρίψεων;

Έστω E το γεγονός που περιγράφτηκε. Τότε $E = \{2, 4, 6, ...\}$, και

$$P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

Οπότε η πιθανότητα να έρθει πρώτη φορά κεφάλι μετά από περιττό αριθμό ρίψεων είναι 2/3.

Ιστορικά Στοιχεία

Η σοβαρή μελέτη των πιθανοτήτων και ο υπολογισμός της πιθανότητας διαφόρων τυχαίων γεγονότων δεν έγινε παρά μόνο το 16^o αιώνα μ.Χ. Τότε, τα προβλήματα που σχετίζονταν με τυχερά παιχνίδια έκαναν τους ανθρώπους να σκεφτούν σχετικά με τις πιθανότητες. Ωστόσο, το γιατί δεν αναπτύχθηκε νωρίτερα μιά θεωρία πιθανοτήτων, είναι ένα ενδιαφέρον ερώτημα στην ιστορία της επιστήμης, αφού τέτοιου είδους παιχνίδια είναι τόσο παλιά όσο και ο ίδιος ο πολιτισμός.

Στην αρχαία Αίγυπτο, τον καιρό της Πρώτης Δυναστείας (3500 π.Χ.), παιζόταν ένα παιχνίδι με τη βοήεια ενός ¨ζαριού¨ τεσσάρων πλευρών. Ζάρια εξάπλευρα φτιαγμένα από ποικιλία υλικών έχουν καταγραφεί από τον 16^o αιώνα π.Χ. Τα τυχερά παιχνίδια ήταν επίσης διαδεδομένα τόσο στην αρχαία Ελλάδα, όσο και στην αρχαία Ρώμη. Πράγματι, στη Ρωμαική αυτοκρατορία στάθηκε πολλές φορές απαραίτητο να νομοθετήσουν ενάντια στα τυχερά παιχνίδια. Γιατί λοιπόν πήρε τόσο χρόνο για να μελετηθούν οι πιθανότητες σοβαρά;

Διάφορες εξηγήσεις έχουν προταθεί γι' αυτήν την αργοπορία. Η μία είναι ότι τα σχετικά μαθηματικά δεν ήταν ανεπτυγμένα και δεν ήταν εύκολο να αναπτυχθούν. Ο αρχαίος μαθηματικός συμβολισμός έκανε τους αριθμητικούς υπολογισμούς πολύ δύσκολους, και ο οικείος σε μας αλγεβρικός συμβολισμός δεν καθιερώθηκε παρά μόνο τον 16^o αιώνα μ.Χ. Ωστόσο, πολλές από τις ιδέες της συνδυαστικής, απαραίτητες για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων είχαν συζητηθεί πολύ νωρίτερα. Αφού πολλά από τα τυχαία γεγονότα εκείνους τους καιρούς είχαν να κάνουν με λοταρίες που σχετίζονταν με θρησκευτικά θέματα, έχει προταθεί ότι μπορεί να υπήρχαν θρησκευτικοί φραγμοί στη μελέτη της τύχης και των τυχερών παιχνιδιών. Προτάθηκε επίσης ότι υπήρχαν τότε ισχυρότερες ανάγκες, όπως η ανάπτυξη του εμπορίου. Καμία από τις παραπάνω εξηγήσεις δεν είναι πλήρως ικανοποιητική.

Ο πρώτος που υπολόγισε πιθανότητες συστηματικά ήταν ο Gerolamo Cardano (GC) (1501-1576) στο βιβλίο του "Liber de Ludo Aleae". Ο GC, ο οποίος είναι επίσης γνωστός από την διαμάχη του με τον Tartaglia για τη λύση της κυβικής εξίσωσης, ήταν άνθρωπος με ευρύτερα ενδιαφέροντα, όπως η ιατρική, η αστρολογία και τα μαθηματικά. Στο βιβλίο του ασχολήθηκε με την ειδική περίπτωση ισοπίθανων γεγονότων, όπου κατάλαβε ότι η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός είναι ο λόγος του αριθμού των ευνοικών αποτελεσμάτων προς τον ολικό αριθμό αποτελεσμάτων. Πολλά από τα παραδείγματα του GC ασχολούνταν με τη ρίψη ζαριού. Εδώ κατάλαβε ότι τα αποτελέσματα δύο ρίψεων είναι τα 36 διατεταγμένα ζεύγη (i, j) και όχι τα 21 μη διατεταγμένα. Αυτό είναι ένα λεπτό σημείο, το οποίο προκαλούσε προβλήματα σε άλλους συγγραφείς για πιθανότητες ακόμα και πολύ αργότερα. Για παράδειγμα, τον 18^o αιώνα ο διάσημος γάλλος μαθηματικός d' Alembert, συγγραφέας αρκετών βιβλίων για πιθανότητες, ισχυρίστηκε ότι όταν ένα νόμισμα ρίχνεται δύο φορές, ο αριθμός των Κ που εμφανίζεται θα είναι 0,1,2, και έτσι θα έπρεπε να αποδώσουμε ίσες πιθανότητες σ' αυτά τα τρία δυνατά αποτελέσματα. Ο GC διάλεξε το σωστό δειγματοχώρο για τα δικά του προβλήματα με ζάρια, και υπολόγισε σωστά τις πιθανότητες για μιά ποικιλία ενδεχομένων. Έκανε και ο ίδιος λάθη, αλλά, παρόλα αυτά η δουλειά του ήταν μιά αξιοσημείωτη πρώτη προσπάθεια καταγραφής των νόμων της πιθανότητας.

Όμως το έναυσμα για μια συστηματική μελέτη του αντικειμένου των πιθανοτήτων δεν ήταν η δουλεια του GC, αλλά η αλληλογραφία των Pascal και Fermat. Ο Blaise Pascal (1623-1662) υπήρξε παιδί-θαύμα, αφού στα δεκαέξι του δημοσίευσε μιά διατριβή για τις κωνικές τομές, ενώ στα δεκαοκτώ του εφεύρε μια υπολογιστική μηχανή. Την εποχή που αλληλογραφούσε με τον Fermat, η επίδειξή του για το βάρος της ατμόσφαιρας τον είχε ήδη θέσει στην πρώτη γραμμή της σύγχρονης φυσικής. Ο Pierre de Fermat (1601-1665), μελετούσε μαθηματικά στον ελεύθερο χρόνο του, και από πολλούς θεωρήθηκε ως ένας από τους μεγαλύτερους ¨καθαρούς¨ μαθηματικούς όλων των εποχών. Η αλληλογραφία μεταξύ τους άρχισε από τον Pascal, ο οποίος ήθελε να συμβουλευτεί τον Fermat σχετικά με προβλήματα που του δόθηκαν από τον Chevalier de Meré, έναν ευγενή της αυλής του Λουδοβίκου του $14^{ου}$, γνωστό συγγραφέα και παίκτη τυχερών παιχνιδιών.

Ασκήσεις

1. Έστω Ω=$\{a, b, c\}$ ο δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης. Αν $P(a) = 1/2$, $P(b) = 1/3$ και $P(c) = 1/6$, να βρείτε τις πιθανότητες όλων των δυνατών υποσυνόλων του Ω.

2. Ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι δύο φορές. Βρείτε την πιθανότητα να έρθει 4,5 ή 6 στην πρώτη ρίψη και 1,2,3 ή 4 στη δεύτερη.

3. Τραβάμε στην τύχη ένα χαρτί από μιά συνηθισμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Να βρεθεί η πιθανότητα το χαρτί αυτό να είναι

   α) άσσος,

   β) βαλές κούπα,

   γ) τρία σπαθί ή έξι καρρό,

   δ) κούπα,

   ε) όχι κούπα,

   στ) δέκα ή μπαστούνι,

   ζ) ούτε τέσσερα ούτε σπαθί.

4. Έστω δύο ενδεχόμενα A και B ενός τυχαίου πειράματος.

   α) Αν $P(A) = 2/5$, $P(B) = 2/5$ και $P(A \cup B) = 1/2$, βρείτε την $P(A \cap B)$.

   β) Αν $P(A) = 1/3$, $P(A \cup B) = 1/2$ και $P(A \cap B) = 1/4$, βρείτε την $P(B)$.

   γ) Αν $P(A^c) = 1/3$, $P(B) = 1/2$ και $P(A \cap B) = 1/4$, βρείτε την $P(A \cup B)$.

   δ) Αν $P(B^c) = 1/2$, και $P(A|B) = 1/2$, βρείτε την $P(A \cap B)$.

5. Ένα δοχείο περιέχει r κόκκινους και b μαύρους βόλους. Επιλέγουμε τυχαία ένα βόλο από το δοχείο, και στη συνέχεια ένα δεύτερο από αυτούς που είχαν απομείνει στο δοχείο. Βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

   α) και οι δύο βόλοι είναι κόκκινοι

   β) ο πρώτος βόλος είναι κόκκινος και ο δεύτερος μαύρος

   γ) ο πρώτος βόλος είναι μαύρος και ο δεύτερος κόκκινος

   δ) και οι δύο βόλοι είναι μαύροι.

6. Ποια είναι η πιθανότητα μιά οικογένεια με δύο παιδιά να έχει

   α) δύο αγόρια δεδομένου ότι έχει τουλάχιστον ένα αγόρι;

   β) δύο αγόρια δεδομένου ότι το πρώτο παιδί είναι αγόρι;

7. Σε ένα πανεπιστήμιο, το 70% είναι άνδρες και 30% είναι γυναίκες. Είναι γνωστό ότι το 40% των ανδρών και το 60% των γυναικών είναι καπνιστές. Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής που καπνίζει να είναι άνδρας;

8. Από 10 κάρτες, αριθμημένες από το ένα ως το 10, επιλέγονται δύο τυχαία και χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα οι αριθμοί που εμφανίστηκαν να έχουν άθροισμα:

   α) ίσο με 10;

   β) μικρότερο του 10;

   γ) μεγαλύτερο του 10;

9. Δύο τίμια ζάρια ρίχνονται μία φορά. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των γεγονότων:

   $A = \{$εμφανίζονται ίδιοι αριθμοί και στις δύο όψεις $\}$,

   $B = \{$ο εμφανιζόμενος αριθμός στο ένα ζάρι είναι μεγαλύτερος του εμφανιζόμενου στο άλλο ζάρι $\}$,

   $\Gamma = \{$ το άθροισμα των εμφανιζόμενων αριθμών και στα δύο ζάρια είναι άρτιος $\}$.

10. Υποθέστε ότι A και B είναι δύο γεγονότα με θετική πιθανότητα να πραγματοποιηθούν. Δείξτε ότι αν $P(A|B) = P(A)$, τότε $P(B|A) = P(B)$.

11. Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινες, 4 άσπρες και 5 μπλέ σφαίρες, κατά τ' άλλα όμοιες. Επιλέγουμε διαδοχικά τρεις σφαίρες (α) με επανατοποθέτηση, (β) χωρίς επανατοποθέτηση. Βρείτε την πιθανότητα να βγούν οι σφαίρες στη σειρά κόκκινη, άσπρη και μπλέ.

12. Εάν A_j, $j = 1, 2, ..., n$ είναι γεγονότα ενός πειράματος τύχης, δείξτε ότι

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

13. Ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι δύο φορές, και θεωρούμε τα γεγονότα A_j, $j = 1, 2, 3$, όπου

    $A_1 =$¨περιττός αριθμός εμφανίζεται στην πρώτη ρίψη¨,

    $A_2 =$¨περιττός αριθμός εμφανίζεται στην δεύτερη ρίψη¨,

    $A_3 =$¨το άθροισμα των δύο αριθμών που εμφανίστηκαν είναι περιττός αριθμός¨.

    Να εξεταστούν τα γεγονότα αυτά από την άποψη ανεξαρτησίας.

14. Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές. Θεωρήστε τα παρακάτω γεγονότα:

    Α=¨κεφάλι στην πρώτη ρίψη¨

    Β=¨κεφάλι στη δεύτερη ρίψη¨

    Γ=¨και οι δύο ρίψεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα¨.

    α) Δείξτε ότι τα A, B, και Γ είναι ανά δύο ανεξάρτητα αλλά δεν είναι ανεξάρτητα.

    β) Δείξτε ότι το Γ είναι ανεξάρτητο των A και B, αλλά δεν είναι ανεξάρτητο του $A \cap B$.

15. Υποθέτουμε ότι A, B, και Γ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και $P(A \cap B) \neq 0$. Δείξτε ότι $P(\Gamma | A \cap B) = P(\Gamma)$.

16. Ρίχνουμε τρείς φορές ένα αμερόληπτο ("τίμιο") ζάρι. Αν ξέρουμε ότι το 1 εμφανίστηκε τουλάχιστον μιά φορά, ποια είναι η πιθανότητα να εμφανίστηκε ακριβώς μία φορά;

17. Δύο τίμια ζάρια ρίχνονται μία φορά. Δεδομένου ότι το άθροισμα των εμφανισθέντων αριθμών είναι 7, ποια είναι η πιθανότητα σ' ένα τουλάχιστον από τα ζάρια να εμφανιστεί ένα 3;

18. Ένα κουτί περιέχει 4 άσπρες και 2 μαύρες σφαίρες, ενώ ένα δεύτερο 3 άσπρες και 5 μαύρες. Επιλέγουμε μιά σφαίρα από κάθε κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι

    α) και οι δύο άσπρες,

    β) και οι δύο μαύρες,

    γ) η μιά άσπρη και η άλλη μαύρη;

19. Τραβάμε στην τύχη ένα χαρτί από μιά τράπουλα 52 χαρτιών, και μετά ένα δεύτερο (α) με επανατοποθέτηση του πρώτου, (β) χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε δύο άσσους;

20. Ένα εργοστάσιο έχει δύο μηχανήματα A και B, τα οποία κατασκευάζουν το 60% και 40% της συνολικής παραγωγής, αντίστοιχα. Το ποσοστό των ελαττωματικών κομματιών είναι 3% για το μηχάνημα A και 5% για το μηχάνημα B. Βρείτε την πιθανότητα ένα ελαττωματικό κομμάτι της παραγωγής να κατασκευάστηκε από το μηχάνημα B.

Βιβλιογραφία

- M. R. Spiegel, Πιθανότητες και Στατιστική, (ΕΣΠΙ, Αθήνα 1977). Μετάφραση του Probability and Statistics, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York, 1975.

- Φ. Κολυβά – Μαχαίρα, και Ε. Μπόρα – Σέντα, Στατιστική, Θεωρία και Εφαρμογές, (Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1998).

- Σημειώσεις Θεωρίας Πιθανοτήτων (βασισμένες στο βιβλίο Introduction to Probability Theory, των Hoel, Port, και Stone), Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών, Φθινόπωρο 1999.

- Θεωρία Πιθανοτήτων, Γ. Γ. Ρούσσα, (Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1992).

- Introduction to Probability, Charles M. Grinstead, and J. Laurie Snell. Διαθέσιμο on-line στη διεύθυνση:
  http://www.dartmouth.edu/ chance/teaching_aids/books_articles/probability_book

Κεφάλαιο 2: Διατάξεις και Συνδυασμοί.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Μέχρι το τέλος αυτού του κεφαλαίου θα θεωρούμε πειράματα τύχης των οποίων τα στοιχειώδη γεγονότα (τα στοιχεία του δειγματοχώρου Ω) είναι ισοπίθανα. Τότε, αν ο αριθμός των σημείων του Ω είναι s, ένα γεγονός A το οποίο περιλαμβάνει j σημεία έχει πιθανότητα j/s να πραγματοποιηθεί.

Γενικότερα, η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός A είναι $P(A) = N(A)/s$, όπου $N(A)$ το πλήθος των σημείων του A. Το πρόβλημα λοιπόν του υπολογισμού της $P(A)$ ανάγεται σε πολλές περιπτώσεις, σ' αυτό του υπολογισμού του $N(A)$. Όπως είδαμε και στα προηγούμενα, η συνηθισμένη διαδικασία για τον υπολογισμό της $P(A)$ είναι να ¨μετρήσουμε¨ το πλήθος των σημείων του A, $N(A)$, και να διαιρέσουμε με το s. Ωστόσο, ο υπολογισμός του $N(A)$ είναι εύκολος μόνο αν το A έχει λίγα σημεία. Ακόμα και για μέτριο πλήθος σημείων, η μέθοδος της ευθείας απαρίθμησης είναι πρακτικά ανεφάρμοστη. Έτσι, η ανάγκη για απλούς κανόνες απαρίθμησης γίνεται επιτακτική. Θα παρουσιάσουμε παρακάτω τεχνικές απαρίθμησης που είναι στοιχειώδεις, έχουν ευρύ φάσμα εφαρμογών, και είναι πολύ χρήσιμες στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Παράδειγμα 1: Πηγαίνετε να γευματίσετε σ' ένα εστιατόριο πολυτελείας, και ο σερβιτόρος σας πληροφορεί ότι έχετε:

α) δύο επιλογές για ορεκτικό (σούπα ή χυμό),

β) τρείς επιλογές για κύριο πιάτο (κρέας, ψάρι, και πιάτο λαχανικών),

γ) δύο για επιδόρπιο (παγωτό ή γλυκό).

Ποιες είναι οι δυνατές επιλογές σας για το πλήρες γεύμα;

Το μενού αποφασίζεται σε τρία στάδια, και στο κάθε στάδιο ο αριθμός των δυνατών επιλογών σας δεν εξαρτάται από το τι διαλέξατε στο προηγούμενο. Δύο επιλογές για το πρώτο στάδιο, τρεις για το δεύτερο και δύο για το τρίτο. Προφανώς ο συνολικός αριθμός επιλογών είναι το γινόμενο του αριθμού των επιλογών σε κάθε στάδιο. Εδώ έχουμε $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ διαφορετικά μενού, για να διαλέξουμε.

Παράδειγμα 2: Σε ένα πείραμα τύχης ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος·

Προφανώς αυτό είναι ένα πείραμα που εκτελείται σε δύο στάδια. Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε πρώτα το νόμισμα (Π_1). Έχουμε δύο δυνατά αποτελέσματα, κεφάλι (Κ) ή γράμματα (Γ). Κατόπιν ρίχνουμε το ζάρι (Π_2). Γι' αυτό έχουμε έξι δυνατά αποτελέσματα, τα 1,2,3,4,5,6. Τώρα, κάθε σημείο του δειγματοχώρου του Π_1 μπορεί να συνδυαστεί με καθένα από τα 6 σημεία του δειγματοχώρου του Π_2, για να δώσει

$2 \cdot 6$ το πλήθος διατεταγμένα ζεύγη. Ο δειγματοχώρος του σύνθετου πειράματος θα είναι λοιπόν
$\Omega =$ { (Κ,1), (Κ,2),...,(Κ,6),(Γ,1),(Γ,2),...,(Γ,6) } ,
όπου το σημείο (Κ, 4), λόγου χάρη, σημαίνει 'να έρθει Κ στη ρίψη του νομίσματος, και 4 στη ρίψη του ζαριού'.

Θα διατυπωσουμε τώρα μιά μάλλον προφανή πρόταση, η οποία είναι γνωστή ως η βασική αρχή της απαρίθμησης.

Πρόταση: Υποθέτουμε ότι ένα έργο (π.χ. μια εργασία, ένα πείραμα τύχης, κ.τ.λ.) μπορεί να ολοκληρωθεί σε n στάδια (ή βαθμίδες ή στοιχειώδη πειράματα τύχης). Υπάρχουν m_1 τρόποι να εκτελέσουμε το πρώτο στάδιο (ή m_1 επιλογές για το πρώτο στάδιο, ή m_1 δειγματοσημεία στον δειγματοχώρο του πρώτου σταδίου). Για καθέναν από αυτούς τους m_1 τρόπους υπάρχουν m_2 τρόποι να εκτελέσουμε το δεύτερο στάδιο. Για καθέναν από αυτούς τους m_2 τρόπους υπάρχουν m_3 τρόποι να εκτελέσουμε το τρίτο στάδιο, κ.ο.κ. Τότε ο ολικός αριθμός των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορεί να ολοκληρωθεί το έργο αυτό, δίνεται από το γινόμενο $N \equiv m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$.

Ας εξειδικεύσουμε το παραπάνω σε πειράματα τύχης. Θεωρούμε n πειράματα τύχης (ή n στάδια ενός σύνθετου πειράματος τύχης), Π_1, Π_2,...,Π_n, και τους αντίστοιχους δειγματοχώρους, Ω_1, Ω_2,...,Ω_n, με πλήθος δειγματοσημείων $N(\Omega_j) = m_j,\ j = 1, 2, ..., n$. Ακολούθως θεωρούμε το σύνθετο πείραμα τύχης Π, που συνίσταται στην ταυτόχρονη εκτέλεση των n παραπάνω πειραμάτων τύχης. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα του Π; (ή, ισοδύναμα, πόσες είναι οι δυνατές $n-$άδες που μπορούμε να κατασκευάσουμε παίρνοντας ένα στοιχείο από Ω_1, ένα στοιχείο από τον Ω_2, κ.τ.λ.).

Η απάντηση, η οποία δίνεται από την προηγούμενη πρόταση, είναι $N(\Omega) = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$, όπου Ω ο δειγματοχώρος του Π. Αυτό είναι και το πλήθος των $n-$άδων $x_1, x_2, ..., x_n$ που μπορούμε να σχηματίσουμε παίρνοντας ένα στοιχείο x_1 από το Ω_1, ένα στοιχείο x_2 από το Ω_2, κ.τ.λ.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση του παραπάνω παραδείγματος παίρνουμε αν ο καθένας από τους δειγματοχώρους Ω_j είναι το ίδιο πάντα σύνολο, έστω S, το οποίο έχει s στοιχεία. Τότε υπάρχουν s^n το πλήθος $n-$άδες $x_1, x_2, ..., x_n$, για τις οποίες κάθε x_j είναι ένα από τα στοιχεία του S. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα ζάρι τρεις φορές, οι τριάδες (x_1, x_2, x_3) που μπορούν να σχηματιστούν είναι 6^3, όπου τα x_1, x_2, και x_3 είναι στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Οι τριάδες αυτές είναι τα σημεία του δειγματοχώρου Ω του πειράματος της ρίψης τριών ζαριών, όπου η τριάδα (2,4,5), π.χ. παριστάνει το ενδεχόμενο ¨να έρθει 2 το πρώτο ζάρι, 4 το δεύτερο, και 5 το τρίτο¨.

Διατάξεις

Η παραπάνω περίπτωση μπορεί να ιδωθεί και από άλλη οπτική γωνιά, όπως φαίνεται στο εξής παράδειγμα:

Παράδειγμα 3: Ένα δοχείο περιέχει s όμοιους βόλους, που φέρουν αριθμούς από το 1 ως το s. Επιλέγουμε τυχαία ένα βόλο από το δοχείο, σημειώνουμε τον αριθμό του και τον ξανατοποθετούμε στο δοχείο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί n φορές, ποιος είναι ο δειγματοχώρος (σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων) του πειράματος;

Κάθε μία από τις επιλογές δίνει έναν αριθμό από το 1 ως το s. Το αποτέλεσμα των n επιλογών περιγράφεται από τη $n-$άδα $x_1, x_2, ..., x_n$, όπου το x_1 είναι ο αριθμός πάνω στον πρώτο βόλο που επιλέξαμε, το x_2 είναι ο αριθμός πάνω στον δεύτερο βόλο που επιλέξαμε, κ.τ.λ. Συνολικά υπάρχουν s^n δυνατές $n-$άδες, οι οποίες αποτελούν τα σημεία του δειγματοχώρου Ω του πειράματος.

Η παραπάνω διαδικασία λέγεται **δειγματοληψία με επανατοποθέτηση** από έναν πληθυσμό s διακεκριμένων αντικειμένων. Το αποτέλεσμα $x_1, x_2, ..., x_n$ λέγεται **διατεταγμένο δείγμα** μεγέθους n από έναν πληθυσμό μεγέθους s αντικειμένων με επανατοποθέτηση, ή **διάταξη** των s αντικειμένων ανά n. Εδώ βέβαια υποθέτουμε ότι όλα τα s^n δυνατά δείγματα έχουν την ίδια πιθανότητα. Για παράδειγμα, στη ρίψη των τριών ζαριών, όπου έχουμε $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα, καθένα από αυτά θεωρούμε ότι έχει πιθανότητα $1/216$ να βγεί.

Παράδειγμα 4: Έστω τα γράμματα a, b, c. Πόσα είναι τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη που θα μπορούσαμε να φτιάξουμε από τα γράμματα αυτά χρησιμοποιώντας δειγματοληψία με επανατοποθέτηση;

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα διατεταγμένα δεύγη (δείγματα μεγέθους 2) που μπορούμε να φτιάξουμε από πληθυσμό τριών αντικειμένων (δηλαδή οι διατάξεις των τριών στοιχείων ανά δύο) είναι $3^2 = 9$. Οι διατάξεις αυτές είναι οι $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

Ας δούμε τώρα μια λίγο διαφορετική διαδικασία. Έστω S ένα σύνολο με s διακεκριμένα αντικείμενα, αριθμημένα από το 1 ως το s. Επιλέγουμε ένα από αυτά και σημειώνουμε τον αριθμό του, χωρίς να το ξανατοποθετήσουμε στο S. Αν επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία, θα έχουμε να επιλέξουμε κάποιο από τα υπόλοιπα $s-1$ αντικείμενα. Γενικά, αν εκτελέσουμε τη διαδικασία αυτή n φορές, επιλέγονται συνολικά n αντικείμενα από το S, όπου προφανώς $n \leq s$ (π.χ. επιλογή 6 χαρτιών από μια τράπουλα). Το αποτέλεσμα αυτού του σύνθετου τυχαίου πειράματος περιγράφεται και πάλι από μιά $n-$άδα $x_1, x_2, ..., x_n$, της οποίας όμως οι αριθμοί πρέπει να είναι διαφορετικοί, αφού δεν έχουμε διπλές εμφανίσεις στο δείγμα μας. Το πρώτο αντικείμενο που επιλέξαμε μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα s (άρα υπάρχουν s τρόποι για την επιλογή του πρώτου αντικειμένου), το δεύτερο οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα $s-1$, κ.ο.κ. Άρα υπάρχουν, σύμφωνα με την πρόταση της προηγούμενης παραγράφου,

$$(s)_n = s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1) = s!/(s-n)!$$

διαφορετικά δυνατά αποτελέσματα για το πείραμα αυτό.

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **δειγματοληψία n αντικειμένων χωρίς επανατοποθέτηση**, αν υποθέσουμε ότι όλα τα $(s)_n$ αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

Παράδειγμα 5: Έστω τα γράμματα a, b, c. Πόσα είναι τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη που θα μπορούσαμε να φτιάξουμε από τα γράμματα αυτά χρησιμοποιώντας δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση;

Δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση σημαίνει ότι στο κάθε διατεταγμένο ζεύγος ένα γράμμα θα εμφανίζεται μόνο μία φορά. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο αριθμός τέτοιων ζευγών είναι $(3)_2 = 3!/(3-2)! = 6$. (Τα διατεταγμένα αυτά ζεύγη είναι τα $\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$.)

Στην ειδική περίπτωση όπου $n = s$, δηλαδή ζητάμε τα διατεταγμένα δείγματα μεγέθους s που μπορούμε να φτιάξουμε από πληθυσμό s αντικειμένων χωρίς επανατοποθέτηση, ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων ειναι

$$(s)_s = s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdots 2 \cdot 1 = s!.$$

Τα αποτελέσματα αυτά λέγονται **μεταθέσεις** των s αριθμών. Λέμε λοιπόν ότι το σύνολο των δυνατών μεταθέσεων s αριθμών είναι $s!$.

Π.χ., οι δυνατές μεταθέσεις των τριών γραμμάτων a, b, c του προηγούμενου παραδείγματος είναι 3!=6 (είναι οι $(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a)$).

Παράδειγμα 6: Το περίφημο πρόβλημα των γενεθλίων.
Πόσους ανθρώπους χρειάζεται να έχουμε σε ένα δωμάτιο ώστε η πιθανότητα δύο από αυτούς να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα να είναι ευνοική· (Δηλαδή να είναι μεγαλύτερη από 1/2;)

Για να το βρούμε, θα υπολογίσουμε την πιθανότητα P σε ένα δωμάτιο με n ανθρώπους να μην υπάρχουν δύο που έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία. Δεχόμαστε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες (αγνοούμε τα δίσεκτα έτη), και ότι όλες οι ημέρες ενός έτους έχουν την ίδια πιθανότητα να είναι ημέρες γενεθλίων. Αριθμούμε τους ανθρώπους από το 1 εως το n. Τα σημεία του δειγματοχώρου είναι $n-$άδες της μορφής $(x_1, x_2, ..., x_n)$, όπου τα x_i, $i = 1, 2, ..., n$ είναι μιά από τις 365 ημέρες του έτους. Όλες οι δυνατές $n-$άδες είναι 365^n, ενώ αυτές στις οποίες καμία ημερομηνία δεν εμφανίζεται πάνω από μιά φορά είναι

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1) = (365)_n.$$

Υποθέτοντας ότι κάθε μία από αυτές έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί, έχουμε

$$P = \frac{(365)_n}{365^n}.$$

Τότε, το n που απαιτείται ώστε η πιθανότητα να έχουν δύο από τους n ανθρώπους γενέθλια την ίδια ημερομηνία να είναι ευνοική, βρίσκεται από τη σχέση

$$P < \frac{1}{2} \Rightarrow= (365)_n < 365^n.$$

Το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό. Ακόμα και για $n = 23$ έχουμε ότι $P < 1/2$, ενώ για $n = 56$ έχουμε $P = 0.01$. Δηλαδή, σε μιά ομάδα 56 ατόμων είναι σχεδόν βέβαιο ότι δύο από αυτούς έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία.

Είδαμε ότι αν έχουμε έναν πληθυσμό s αντικειμένων, μπορούμε να επιλέξουμε s^n δείγματα μεγέθους n με επανατοποθέτηση, και $(s)_n$ δείγματα χωρίς επανατοποθέτηση. Αν όμως το s είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το n ($s \gg n$), τότε η διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων τυχαίας δειγματοληψίας είναι πολύ μικρή.

Συνδυασμοί (μη διατεταγμένα δείγματα)

Υπάρχουν περιπτώσεις (πειράματα τύχης) στις οποίες η σειρά των στοιχείων ενός δείγματος δεν ενδιαφέρει. Π.χ., στο πόκερ. Ένα χέρι του πόκερ αποτελείται από 5 χαρτιά τα οποία επιλέγονται τυχαία από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά. Είδαμε ότι για ένα τέτοιο σύνολο υπάρχουν $(52)_5$ δυνατές διατάξεις (χωρίς επανατοποθέτηση) 5 χαρτιών. Αν όμως κάνουμε έτσι τον υπολογισμό, διαφορετικές διατάξεις των ίδιων 5 χαρτιών θεωρούνται διαφορετικά χέρια. Όμως στο πόκερ η πεντάδα 2,3,4,5,6 σπαθιά (με αυτή τη διάταξη) είναι ίδια με την πεντάδα 3,2,4,5,6 σπαθιά (με αυτή τη διάταξη). Για την ακρίβεια, όλες οι 5! μεταθέσεις των 5 χαρτιών είναι ισοδύναμες στο πόκερ. Έτσι, από τα $(52)_5$ δυνατά χέρια, τα 5! από αυτά είναι απλώς μεταθέσεις αυτών των ίδιων 5 χαρτιών. Άρα το συνολικό πλήθος των χεριών του πόκερ, αν αγνοήσουμε τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα χαρτιά, είναι $(52)_5/5!$.

Γενικά, από ένα σύνολο S που περιέχει s διακεκριμένα αντικείμενα, μπορούμε να επιλέξουμε $(s)_n$ διαφορετικά δείγματα μεγέθους n χωρίς επανατοποθέτηση. Κάθε διακεκριμένο υποσύνολο $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ από n στοιχεία του S μπορεί να διαταχθεί με $n!$ διαφορετικούς τρόπους. Αν αποφασίσουμε να αγνοήσουμε τη σειρά με την οποία τα αντικείμενα εμφανίζονται στο δείγμα, τότε αυτές οι $n!$ αναδιατάξεις ή μεταθέσεις πρέπει να θεωρηθούν ταυτόσημες. Υπάρχουν λοιπόν $(s)_n/n!$ διαφορετικά δείγματα μεγέθους n που μπορούμε να επιλέξουμε χωρίς επανατοποθέτηση και χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξη από ένα σύνολο S που περιέχει s διακεκριμένα αντικείμενα. Τα δείγματα αυτά λέγονται **συνδυασμοί** των s στοιχείων ανά n.

Η ποσότητα $(s)_n/n!$ γράφεται συνήθως με τη βοήθεια του συμβόλου του λεγόμενου διωνυμικού συντελεστή

$$\frac{(s)_n}{n!} = \left(\begin{array}{c} s \\ n \end{array} \right)$$

και μπορούμε να δούμε ότι ισούται με $s!/(s-n)!n!$

$$\left(\begin{array}{c} s \\ n \end{array} \right) = \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} = \frac{[1\cdot 2\cdots(s-n)][(s-n+1)\cdots(s-1)s]}{[1\cdot 2\cdots(s-n)]n!} = \frac{s!}{(s-n)!n!}.$$

Η ορολογία ¨διωνυμικός συντελεστής¨ προέρχεται από μιά εφαρμογή της άλγεβρας, και συγκεκριμένα το ανάπτυγμα του διωνύμου,

$$(x+y)^s = \sum_{n=0}^{s} \left(\begin{array}{c} s \\ n \end{array} \right) x^{s-n}y^n = x^s + \left(\begin{array}{c} s \\ 1 \end{array} \right) x^{s-1}y + \left(\begin{array}{c} s \\ 2 \end{array} \right) x^{s-2}y^2 + \cdots + \left(\begin{array}{c} s \\ s \end{array} \right) y^s,$$

όπου το πλήθος των συνδυασμών $\left(\begin{array}{c} s \\ n \end{array} \right)$ εμφανίζεται στους συντελεστές του αναπτύγματος.

Οι συντελεστές αυτοί έχουν πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα

1)

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ j-1 \end{array} \right),$$

2)

$$\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array} \right),$$

3)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

κ. ά.,

οι οποίες αποδεικνύονται πολύ εύκολα. Σημειώστε ότι το σύμβολο $\binom{a}{n}$ είναι καλά ορισμένο για κάθε πραγματικό αριθμό a και μη αρνητικό n, και ότι τα $0!$ και $(a)_0$ είναι εξ ορισμού ίσα με 1.

Παράδειγμα 7: Πόσα είναι τα δυνατά μη διατεταγμένα ζεύγη που μπορούμε να φτιάξουμε από τα γράμματα a, b, c;

Τα ζεύγη αυτά είναι οι δυνατοί συνδυασμοί των τριών αριθμών ανά δύο, άρα $\binom{3}{2}$ $= 3!/2!1! = 3$ (είναι τα $(a, b), (a, c), (b, c)$).

Παράδειγμα 8: Σύνθεση επιτροπής.
Το τμήμα Υλικών έχει 3 καθηγητές πρώτης βαθμίδας, 6 αναπληρωτές καθηγητές, και 8 επίκουρους καθηγητές. Μια τριμελής επιτροπή εκλέγεται τυχαία από τα παραπάνω μέλη ΔΕΠ. Βρείτε την πιθανότητα όλα τα μέλη της επιτροπής να είναι επίκουροι καθηγητές.

Αν ορίσουμε ως A το γεγονός 'και τα τρία μέλη της επιτροπής είναι επίκουροι', τότε η πιθανότητα του A δίνεται από το πλήθος των στοιχείων του A προς το συνολικό πλήθος των δειγματοσημείων του πειράματος (που το πλήθος των δυνατών μη διατεταγμένων τριάδων που μπορούμε να φτιάξουμε από τα υπάρχοντα μέλη ΔΕΠ). Συνολικά, το τμήμα έχει 17 μέλη ΔΕΠ. Η επιτροπή των τριών μπορεί να εκλεγεί από τους 17 με $\binom{17}{3}$ τρόπους. Υπάρχουν 8 επίκουροι καθηγητές, και οι 3 της επιτροπής μπορούν να επιλεγούν από αυτούς με $\binom{8}{3}$ τρόπους. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = \binom{8}{3} \Big/ \binom{17}{3} \simeq 0.082.$$

Σε πολλές περιπτώσεις οδηγούμαστε στον υπολογισμό παραγοντικών. Όταν όμως ο αριθμός, έστω n, είναι ακόμα και μέτριου μεγέθους (για παράδειγμα $n = 15$), τότε το $n!$ είναι πάρα πολύ μεγάλος αριθμός. Στις περιπτώσεις αυτές, μια προσεγγιστική τιμή του $n!$ δίνεται από τον τύπο του Stirling, σύμφωνα με τον οποίο

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

όπου e είναι η βάση των νεπέρειων λογαρίθμων (σταθερά του Euler), $e = 2.71828...$. Μια τελευταία παρατήρηση που αφορά τον συμβολισμό: Οι ποσότητες $(s)_n$ και $(s)_n/n!$ συμβολίζονται επίσης με ${}_sP_n$ (P από το Permutations (μεταθέσεις)) και ${}_sC_n$ (C από το Combinations (συνδυασμοί)), αντίστοιχα

Ασκήσεις

1. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθήσουν στη σειρά 10 άνθρωποι σε 4 καρέκλες;

2. Διαλέγουμε τυχαία 5 αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, ..., 15\}$, με επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα:

   α) ο μεγαλύτερος να είναι 9;

   β) ο μικρότερος να είναι 3 και ο μεσαίος (σε μέγεθος) να είναι 8;

   γ) οι δύο να είναι άρτιοι και οι τρείς περιττοί;

3. Ένα δοχείο περιέχει 8 αριθμημένους βόλους από το 1 ως το 8. Επιλέγουμε 4 βόλους στην τύχη, χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα ο μικρότερος αριθμός να είναι το 3·

4. Δέκα χαρτιά επιλέγονται στην τύχη από μιά τράπουλα 52 χαρτιών. Σε πόσες περιπτώσεις περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένας άσσος· Σε πόσες περιπτώσεις περιλαμβάνεται ακριβώς ένας άσσος·

5. Τρεις γυναίκες και πέντε άνδρες σχηματίζουν μιά τετραμελή ομάδα. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό, έτσι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον μία γυναίκα στην ομάδα·

6. Πόσες διαφορετικές επιτροπές με 3 άνδρες και 4 γυναίκες μπορούν να σχηματιστούν από 8 άνδρες και 6 γυναίκες·

7. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν 10 άνθρωποι σε δύο ομάδες από 7 και 3 ανθρώπους·

8. Υπολογίστε την πιθανότητα να εμφανιστούν 3 εξάρια σε 5 ρίψεις ενός ζαριού.

9. Παίρνουμε τυχαία 3 αριθμούς χωρίς επανατοποθέτηση από ένα δοχείο που περιέχει τους αριθμούς 1,2,...,20. Να βρεθεί η πιθανότητα των παρακάτω γεγονότων:

   α) το άθροισμα τους να είναι 11

   β) το γινόμενό τους είναι άρτιο

   γ) ο μικρότερος είναι 4 ή 5.

Κεφάλαιο 3: Τυχαίες μεταβλητές και κατανομές πιθανότητας.

Περιεχόμενα

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Θεωρούμε ένα πείραμα τύχης στο οποίο ρίχνουμε ένα νόμισμα τρείς φορές, με πιθανότητα p να εμφανιστούν γράμματα (Γ) σε κάθε ρίψη (σε ένα 'τίμιο' νόμισμα η πιθανότητα αυτή θα είναι 1/2). Υποθέστε ότι αν σε μια ρίψη εμφανιστούν Γ κερδίζουμε 1 ευρώ, ενώ αν εμφανιστεί κεφάλι (Κ) χάνουμε 1 ευρώ. Προφανώς η ποσότητα που μας ενδιαφέρει εδώ, και την οποία συμβολίζουμε με X, είναι το συνολικό μας κέρδος. Είναι φανερό ότι η X μπορεί να πάρει μόνο μία από τις τιμές: 3, 1, -3, και -1. Το ποια από αυτές θα πάρει εξαρτάται από το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος. Αν, για παράδειγμα, το αποτέλεσμα είναι ΓΓΓ η X παίρνει την τιμή 3, ενώ αν είναι ΓΚΓ η X παίρνει την τιμή 1. Στον παρακάτω πίνακα καταγράφουμε τις τιμές της X που αντιστοιχούν στα οκτώ δυνατά αποτελέσματα, ω, του τυχαίου πειράματος, καθώς και την πιθανότητα να εμφανιστεί καθένα από τα αποτελέσματα αυτά (σημειώστε ότι ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων είναι ο αριθμός των δυνατών τριάδων που μπορούμε να φτιάξουμε από τα δύο στοιχεία, Γ, Κ, οι οποίες, σύμφωνα με τη θεωρία του προηγούμενου κεφαλαίου, είναι $2 \times 2 \times 2$).

ω	X	$P(\omega)$
ΓΓΓ	3	p^3
ΓΚΓ	1	$p^2(1-p)$
ΓΓΚ	1	$p^2(1-p)$
ΚΓΓ	1	$p^2(1-p)$
ΓΚΚ	-1	$p(1-p)^2$
ΚΓΚ	-1	$p(1-p)^2$
ΚΚΓ	-1	$p(1-p)^2$
ΚΚΚ	-3	$(1-p)^3$

(Στον παραπάνω πίνακα, η πιθανότητα του αποτελέσματος ΓΓΓ υπολογίστηκε ως γινόμενο των πιθανοτήτων των τριών ανεξάρτητων ενδεχομένων $A =$'στην πρώτη ρίψη Γ', $B =$'στη δεύτερη ρίψη Γ', $D =$'στην τρίτη ρίψη Γ', λαμβάνοντας υπόψη ότι η πιθανότητα της τομής ανεξάρτητων ενδεχομένων ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους. Ανάλογα για τα άλλα αποτελέσματα.)

Μπορούμε να σκεφτόμαστε τη X ως μια πραγματική μεταβλητή η οποία για κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο ω του Ω παίρνει μια ορισμένη τιμή (εδώ μια από τις τιμές -3,-1,1,3). Η πιθανότητα η X να πάρει μια ορισμένη τιμή, έστω 1, είναι η πιθανότητα του γεγονότος $A = \{\omega : X(\omega) = 1\}$ το οποίο περιλαμβάνει όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ω του Ω που οδηγούν στην τιμη $X = 1$ (στο παράδειγμά μας τα ΓΓΚ, ΓΚΓ και ΚΓΓ). Από τον πίνακα βλέπουμε ότι το A έχει πιθανότητα $P(A) = 3p^2(1-p)$ να πραγματοποιηθεί (το A είναι η ένωση των ανεξάρτητων ενδεχομένων ΓΓΚ, ΓΚΓ και ΚΓΓ). Ανάλογα μπορούμε να χειριστούμε και τις υπόλοιπες τιμές της X. Έτσι, για κάθε τιμή που μπορεί να πάρει η X, έστω x_i (που εδώ θα είναι κάποιο από τα $-3, -1, 1, 3$), η πιθανότητα με την οποία παίρνει αυτή την τιμή, $P(X = x_i)$, είναι πλήρως καθορισμένη (π.χ. $P(X = 1) = 3p^2(1 - p)$). Θα δούμε ότι η X είναι ένα παράδειγμα διακριτής τυχαίας μεταβλητής (ή στοχαστικής συνάρτησης, όπως επίσης λέγεται).

Ορισμός: Διακριτή τυχαία μεταβλητή X σε ένα δειγματοχώρο Ω είναι μια μεταβλητή X που ορίζεται για κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος και για κάθε τέτοιο αποτέλεσμα παίρνει μια ορισμένη τιμή από ένα πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.
Ορισμός: Η πραγματική συνάρτηση f που ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς από την $f(x) = P(X = x)$, λέγεται **διακριτή συνάρτηση πυκνότητας** ή **συνάρτηση πιθανότητας** ή **κατανομή πιθανότητας** της X (Δίνει την πιθανότητα η X να πάρει μια ορισμένη τιμή από το πεδίο τιμών της. Π.χ., για την τυχαία μεταβλητή X που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου $f(1) = P(X = 1)$ δίνει την πιθανότητα η μεταβλητή X (το κέρδος) να πάρει την τιμή 1 (να είναι 1 ευρώ).)

Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή X που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, και ας υποθέσουμε ότι $p = 0.5$. Τότε η X έχει τη διακριτή συνάρτηση πυκνότητας που ορίζεται από τις

$$f(-3) = 0.125,\ f(-1) = 0.375,\ f(1) = 0.375,\ f(3) = 0.125.$$

και $f(x) = 0$, αν $x \neq -3, -1, 1, 3$. Η συνάρτηση πυκνότητας ή απλά πυκνότητα f μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής έχει τις ακόλουθες **ιδιότητες**:

(1) $f(x) \geq 0,\ \ x \in R$

(2) Το σύνολο $\{x : f(x) \neq 0\}$ (δηλαδή το σύνολο των τιμών της Q που έχουν μη μηδενική πιθανότητα) είναι ένα πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του R. Έστω $\{x_1, x_2, ...,\}$ αυτό το σύνολο. Τότε

(3) $\sum_i f(x_i) = 1$.

Οι ιδιότητες (1) και (2) προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της f. Για να δούμε αν ισχύει η (3) παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα $\{\omega : X(\omega) = x_i\}$ (δηλαδή τα ενδεχομενα του Ω που δίδουν για τη Q την τιμή x_i) είναι ξένα και η ένωσή τους είναι το Ω. Άρα

$$\sum_i f(x_i) = \sum_i P(X = x_i) = P\left(\bigcup_i \{X = x_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε εναλλακτικά την πυκνότητα f ως εξής:
Ορισμός: Μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο R λέγεται διακριτή συνάρτηση πυκνότητας ή απλά διακριτή πυκνότητα αν ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες (1) – (3).

Παράδειγμα 1: Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές, και ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως το πλήθος των Κ που εμφανίστηκαν. Να υπολογιστεί η πυκνότητα f της X.

Η αντιστοιχία μεταξύ των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος και των τιμών της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται στον παρακάτω πίνακα, μαζί με την

ω	X	$P(\omega)$
ΚΚ	2	1/4
ΓΓ	0	1/4
ΚΓ	1	1/4
ΓΚ	1	1/4

πιθανότητα των σημείων του δειγματοχώρου Ω του πειράματος. Η πυκνότητα που αντιστοιχεί στη X είναι

$$f(0) = P(X=0) = \frac{1}{4},\ f(1) = P(X=1) = \frac{1}{2},\ f(2) = P(X=2) = \frac{1}{4},$$

και $f(x) = 0$ για $x \neq 0, 1, 2$. Προσέξτε ότι $f(0) + f(1) + f(2) = 1$. Η γραφική παράσταση της f δίνεται είτε με ένα ραβδόγραμμα, είτε με ένα ιστόγραμμα. Σε ένα ραβδόγραμμα το άθροισμα των τεταγμένων είναι 1, ενώ σέ ένα ιστόγραμμα το άθροισμα των εμβαδών είναι 1, όπως προκύπτει από την ιδιότητα (3). Σε ένα ιστόγραμμα μπορούμε να φανταστούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X γίνεται συνεχής, λόγου χάρη $X = 1$ σημαίνει ότι η X είναι μεταξύ 0.5 και 1.5.

Σημειώστε ότι και άλλες τυχαίες μεταβλητές μπορούν να οριστούν στον ίδιο δειγματοχώρο Ω. Λόγου χάρη, στο προηγούμενο παράδειγμα θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια τυχαία μεταβλητή Y ως το πλήθος των Κ που εμφανίζονται μείον το πλήθος των Γ που εμφανίζονται. Τότε, οι δυνατές τιμές της Y θα ήταν -2,0,2, ενώ η αντίστοιχη πυκνότητα θα έπαιρνε τις τιμές $f(-2) = 1/4,\ f(0) = 1/2,\ f(2) = 1/4$ και $f(x) = 0$ για $x \neq -2, 0, 2$.

Κάθε διακριτή συνάρτηση πυκνότητας, δηλαδή κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) – (3), είναι η πυκνότητα κάποιας τυχαίας μεταβλητής X. Με άλλα λόγια, αν μας δοθεί η f μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε ένα δειγματοχώρο Ω και μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον Ω, της οποίας η διακριτή πυκνότητα να είναι f. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιούμε εκφράσεις όπως 'έστω X μια τυχαία μεταβλητή με διακριτή πυκνότητα f' χωρίς να διευκρινίζουμε τον δειγματοχώρο f στον οποίο ορίζεται η X. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι επιλέγουμε ένα χαρτί από μια δεσμίδα με n χαρτιά, και θέτουμε $X = i$ αν επιλεγεί το $i-$οστο χαρτί. Τότε, $P(X = i) = 1/n$, άρα μπορούμε να περιγράψουμε το πείραμα λέγοντας ότι παρατηρούμε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει ακέραιες τιμές $1, 2, 3, ..., n$ και έχει πυκνότητα $f(x) = 1/n$ αν $x = 1, 2, 3, ..., n$ και $f(x) = 0$ αλλιώς.

Γενικά, κάθε τυχαίο πείραμα που έχει πεπερασμένα ή άπειρα αριθμήσιμα το πλήθος δυνατά αποτελέσματα μπορεί να περιγραφεί ως η παρατήρηση της τιμής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X. Για την ακρίβεια, το πείραμα πολλές φορές μας δίνεται ήδη μ' αυτή τη μορφή.

Στα δύο επόμενα παραδείγματα παρουσιάζονται δύο τυπικές διακριτές πυκνότητες.

Παράδειγμα 2: Η **γεωμετρική πυκνότητα**.
Έστω $0 < p < 1$. Τότε η πραγματική συνάρτηση f που ορίζεται στο R από την

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & x = 0, 1, 2, 3, ... \\ 0, & x \neq 0, 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

είναι μια διακριτή πυκνότητα και λέγεται γεωμετρική πυκνότητα με παράμετρο p.

Για να δούμε αν η f είναι πυκνότητα, το μόνο που χρειάζεται να ελέγξουμε είναι ότι ισχύει η ιδιότητα (3), αφού οι (1) και (2) ικανοποιούνται προφανώς. Όμως,

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^i = p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i = p \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

αφού το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς $\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i$ είναι ίσο με $1/p$.

Παράδειγμα 3: Η **πυκνότητα Poisson**.
Έστω λ ένας θετικός αριθμός. Η πυκνότητα Poisson με παράμετρο λ ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0, 1, 2, ... \\ 0, & x \neq 0, 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Η συνάρτηση f προφανώς ικανοποιεί τις (1) και (2) του ορισμού της διακριτής συνάρτησης πυκνότητας. Για να δούμε αν ισχύει η (3) θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Έτσι,

$$\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Η εμπειρία δείχνει ότι πολλά τυχαία φαινόμενα που έχουν σχέση με το μέτρημα ακολουθούν κατά προσέγγιση την κατανομή Poisson, όπως για παράδειγμα τα εξής:

(α) Το πλήθος των ατόμων μιας ραδιενεργού ουσίας που αποσυντίθενται στη μονάδα του χρόνου.

(β) Το πλήθος των κλήσεων που δέχεται ένα τηλεφωνικό κέντρο στη μονάδα του χρόνου. (Δηλαδή η πιθανότητα το πλήθος των κλήσεων που δέχεται το τηλεφωνικό κέντρο να είναι $x = 0, 1, 2, 3, ..$ δίνεται από το $f(x) = \lambda^x e^{-\lambda}/x!$.)

(γ) Το πλήθος των τυπογραφικών λαθών σε μια σελίδα ενός βιβλίου,
κ.τ.λ.

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** ή απλά συνάρτηση κατανομής για μια τυχαία μεταβλητή X ορίζεται από τη σχέση

$$F(x) = P(X \leq x),$$

όπου x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός $(-\infty < x < \infty)$. Η συνάρτηση κατανομής μπορεί να υπολογιστεί από την πυκνότητα f, επειδή

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u),$$

όπου το άθροισμα στο δεξιό μέλος νοείται ως προς όλα τα u για τα οποία $u \leq x$. Αντίστροφα, η πυκνότητα μπορεί να προκύψει από τη συνάρτηση κατανομής, όπως θα δούμε και στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4: Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X του παραδείγματος 1, και δώστε τη γραφική της παράσταση.

Η $F(x)$ θα είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/4, & 0 \leq x < 1 \\ 3/4, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Για παράδειγμα, για $1 \leq x < 2$, η F θα είναι $F(x) = f(0) + f(1) = 3/4$. Βλέπουμε ότι η F είναι μη φθίνουσα, κλιμακωτή συνάρτηση, και ότι για κάθε ακέραιο x, η F παρουσιάζει άλμα (ασυνέχεια) μεγέθους $f(x)$ στο x, ενώ είναι σταθερή στο διάστημα $[x, x+1)$. Έτσι, μπορούμε να προσδιορίσουμε την f από την F και αντιστρόφως.

Παράδειγμα 5: Θεωρήστε τη συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = 1/10$ για $x = 1, 2, ..., 10$ και $f(x) = 0$ για οποιοδήποτε άλλο x. Ποιά είναι η συνάρτηση κατανομής F της f·

Είναι $F(x) = 0$ αν $x < 1$, $F(x) = 1$ αν $x > 10$, και $F(x) = \sum_{u \leq x} f(u) = \frac{[x]}{10}$, αν $1 \leq x \leq 10$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα, λόγου χάρη, $P(3 < x \leq 5)$, είτε με τη βοήθεια της f, γράφοντας

$$P(3 < x \leq 5) = f(4) + f(5) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10},$$

είτε με τη βοήθεια της F:

$$P(3 < x \leq 5) = F(5) - F(3) = \frac{2}{10}.$$

Αν θέλω να βρώ την πιθανότητα $P(3 \leq x \leq 5)$ τότε γράφω

$$P(3 \leq x \leq 5) = P(2 < x \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{3}{10},$$

κ.τ.λ.

Γενικά, ισχύει η σχέση

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a),$$

η οποία είναι πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Στη θεωρία, αλλά και στην πράξη, εμφανίζονται συχνά καταστάσεις στις οποίες οι φυσιολογικές τυχαίες μεταβλητές που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι συνεχείς και όχι διακριτές, δηλαδή μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή σε ένα δεδομένο διάστημα (η τιμή αυτή και εδώ εξαρτάται προφανώς από το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος). Τέτοια παραδείγματα είναι η τυχαία μεταβλητή, έστω T, που παριστάνει το χρόνο διάσπασης ενός ραδιενεργού σωματιδίου ή το χρόνο ζωής ενός ηλεκτρικολυ λαμπτήρα, η τυχαία μεταβλητή X που παριστάνει τη θέση ενός κβαντομηχανικού σωματιδίου παγιδευμένου σε μια περιοχή του χώρου, η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το ύψος ενός ατόμου από ένα δεδομένο δείγμα ατόμων, κ.ο.κ.

Γενικά, τυχαίες μεταβλητές που αφορούν μετρήσεις φυσικών ποσοτήτων, όπως οι συντεταγμένες στο χώρο, το βάρος, ο χρόνος, η θερμοκρασία, η τάση του ρεύματος, κ.τ.λ., περιγράφονται καλύτερα με συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Στην περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών η έκφραση 'πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει μια ορισμένη τιμή x' αντικαθίσταται από την 'πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει τιμές σε ένα ορισμένο απειροστό διάστημα γύρω από το σημείο x'. Με βάση αυτό, η **συνάρτηση πυκνότητας** για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές ορίζεται από τη σχέση

$$f(x)dx = P(x < X \leq x + dx).$$

Προσέξτε ότι, αντίθετα με ό,τι συμβαίνει για διακριτές τυχαίες μεταβλητές, η τιμή της $f(x)$ για το ενδεχόμενο x δεν είναι η πιθανότητα να συμβεί το x.[1] Αυτό που παριστάνει πιθανότητα είναι η το γινόμενο $f(x)dx$.

Από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας για συνεχείς κατανομές γίνεται φανερό ότι η πιθανότητα το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος να είναι στο διάστημα $[a, b]$ δίνεται από την

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

('άθροισμα' των πιθανοτήτων όλων των απειροστών διαστημάτων dx από το a ως το b), δηλαδή από το εμβαδόν κάτω από την f στο διάστημα $[a, b]$.

Προφανώς, η πυκνότητα f θα είναι μια μη αρνητική συνάρτηση και θα ικανοποιεί την

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

αφού η ολική πιθανότητα θα πρέπει να είναι πάντα μονάδα. Η προηγούμενη σχέση χρησιμοποιείται πολλές φορές και ως σχέση ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας f.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, η οποία είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό διαφόρων πιθανοτήτων που σχετίζονται με την τυχαία μεταβλητή X.

Ορισμός: Η **συνάρτηση κατανομής** F μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η συνάρτηση

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \quad -\infty < x < \infty.$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a), \quad a \leq b.$$

Παρατηρούμε ότι για να υπολογίσουμε την πυκνότητα μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής αρκεί να παραγωγίσουμε την F, οπότε

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x στο οποίο η F είναι συνεχής. Προφανώς, από την απαίτηση να είναι η πιθανότητα μηδέν όταν η τυχαία μεταβλητή

[1] Σημειώστε ότι για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, όπου ο δειγματοχώρος περιλαμβάνει άπειρα στο πλήθος σημεία, η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει μια συγκεκριμμένη τιμή είναι μηδέν.

παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή, η F δεν μπορεί να έχει άλματα (ασυνέχειες), άρα θα πρέπει να είναι συνεχής. Επομένως, η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή αν και μόνο αν η F είναι συνεχής για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Παράδειγμα 6: Υποθέστε ότι ρίχνουμε ένα βέλος σε ένα στόχο σχήματος κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα R, στο επίπεδο. Θεωρούμε ότι ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ομοιόμορφος, δηλαδή η πιθανότητα να καρφωθεί το βέλος σε σημείο μιας περιοχή του στόχου εμβαδού E, ορίζεται από το κλάσμα του E προς το συνολικό εμβαδόν του στόχου. Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την απόσταση του σημείου που ¨επιλέχθηκε¨ από το O, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της.

Έστω ότι το βέλος καρφώνεται σε σημείο που απέχει x, $0 \leq x \leq R$, από το O. Τότε, το ενδεχόμενο $A = \{\omega | X(\omega) \leq x\}$ (δηλαδή το ενδεχόμενο που έχει ως σημεία τα δειγματοσημεία ω του Ω για τα οποία η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες με x) είναι ένας δίσκος με κέντρο O και ακτίνα x, και εμβαδόν πx^2. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A ορίζεται από την

$$P(A) = \frac{\text{area of } A}{\text{target area}} = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2},$$

και η F θα είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/R^2, & 0 \leq x \leq R \\ 1, & x > R \end{cases}$$

Αν $A = \{\omega | a \leq X \leq b\}$, με $0 \leq a \leq b \leq R$, τότε $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{b^2 - a^2}{R^2}$, ή

$$P(a < X \leq b) = 2\frac{b-a}{R^2}\frac{b+a}{2}.$$

Έτσι, η πιθανότητα που αποδίδεται στο διάστημα A δεν εξαρτάται μόνο από το μήκος του, αλλά επίσης και από το πού βρίσκεται, αφού το $(a+b)/2$ είναι το μέσο του διαστήματος $[a, b]$. Μιλώντας χονδρικά, γεγονότα της μορφής $A = \{\omega | a \leq X \leq b\}$ είναι πιο πιθανά αν είναι μακριά από το κέντρο του στόχου.

Παράδειγμα 7: **Κανονική πυκνότητα (Gauss)**.
Έστω η συνάρτηση $f(x) = ce^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Υπολογίστε το c ώστε η f να γίνει πυκνότητα.

Για να κάνουμε την f πυκνότητα πρέπει να βρούμε το c έτσι ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, Έτσι, $c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 1$. Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ υπολογίζεται με το εξής τέχνασμα: Θέτω $\frac{1}{c} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$, οπότε

$$\frac{1}{c^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy.$$

Πηγαίνοντας σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\frac{1}{c^2} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr = -2\pi \left[e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} = 2\pi.$$

Άρα, $c = 1/\sqrt{2\pi}$, και $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Η f λέγεται τυπική κανονική πυκνότητα. Προφανώς είναι συμμετρική, αφού $f(x) = f(-x)$ για κάθε x.

Μέση τιμή τυχαίων μεταβλητών

Υποθέστε ότι συμμετέχετε σε ένα τυχερό παιχνίδι. Κάθε φορά που παίζετε 'εισπράτετε' ένα ποσό X, όπου X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με πιθανές τιμές $x_1, x_2, ..., x_r$, τόσο θετικές όσο και αρνητικές. Το ερώτημα είναι αν συμφέρει να συμμετάσχετε. Ας υποθέσουμε ότι το παιχνίδι παίζεται N φορές και ότι οι διαφορετικές παρτίδες του παιχνιδιού συνιστούν ανεξάρτητες επαναλήψεις του ίδιου πειράματος, το οποίο παρατηρεί τη μεταβλητή X. Αν συμβολίσουμε με $N(x_i)$ το πλήθος των παρτίδων (στις N) που έδωσαν για τη X την τιμή x_i, τότε η συνολική είσπραξη/απώλεια από το παιχνίδι θα είναι

$$N(x_1)x_1 + N(x_2)x_2 + \cdots + N(x_r)x_r = \sum_{i=1}^{r} x_i N(x_i).$$

Το μέσο ποσό που εισπράτετε (ή χάνετε) τότε είναι

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{N(x_i)}{N}.$$

Ερμηνεύοντας την πιθανότητα ως σχετική συχνότητα, αν το N είναι αρκετά μεγάλο, περιμένουμε ότι

$$\frac{N(x_i)}{N} \simeq P(X = x_i) = f(x_i).$$

Επομένως το μέοο ποσό που εισπράτετε ή χάνετε θα πρέπει να είναι περίπου ίσο με $\mu = \sum_{i=1}^{r} x_i f(x_i)$. Αν το ποσό αυτό είναι θετικό φαίνεται λογικό να περιμένουμε καθαρό κέρδος από το παιχνίδι, αν είναι αρνητικό ζημία και αν είναι μηδέν ούτε κέρδος ούτε ζημία.

Γενικά, έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X που παίρνει τις πεπερασμένες το πλήθος τιμές $x_1, x_2, ..., x_r$. Τότε η μέση τιμή της X, η οποια συμβολίζεται με μ ή $E(X)$ ή $\bar{X}$ ή $< X >$ είναι ο αριθμός

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i f(x_i),$$

όπου $f(x)$ είναι η πυκνότητα της X.

Υποθέστε ότι η X έχει την ομοιόμορφη πυκνότητα $f(x_i) = P(X = x_i) = 1/r$. Τότε από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε ότι $E(X) = (1/r) \sum_{i=1}^{r} x_i = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r)/r$, δηλαδή στην περίπτωση αυτή η $E(X)$ είναι απλώς ο μέσος όρος των πιθανών τιμών της X. Γενικά, όπως φαίνεται από τον ορισμό της, η $E(X)$ είναι ένας ¨μέσος όρος¨ με βάρη των πιθανών τιμών της X. Όταν το πλήθος των τιμών της X είναι άπειρο (αριθμήσιμο), η μέση τιμή έχει νόημα αν το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$ είναι καλά ορισμένο.

Για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x)$ η μέση τιμή ορίζεται από τη σχέση

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

όπου το άθροισμα πάνω σε όλες τις πιθανές τιμές της X έχει αντικατασταθεί με ολοκλήρωμα.

Παρακάτω δίνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες της μέσης τιμής, που προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό της. Για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y με πεπερασμένη μέση τιμή, έχουμε α) Αν η Q παίρνει μόνο μία τιμή, $c =$σταθερά, και $P(X = c) = 1$, τότε $E(X) = c$.

β) Αν $c =$σταθερά, τότε η cX έχει πεπερασμένη μέση τιμή, και $E(cX) = cE(X)$.

γ) Η $X + Y$ έχει πεπερασμένη μέση τιμή και $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

δ) Υποθέστε ότι $P(X \geq Y) = 1$. Τότε, $E(X) \geq E(Y)$. Επιπλέον, $E(X) = E(Y)$, αν και μόνο αν $P(X = Y) = 1$.

ε) $|E(X)| \leq E(X)$

στ) $E(XY) = E(X)E(Y)$, αν X και Y είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Παράδειγμα 8: Υπολογίστε τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί τη (διακριτή) πυκνότητα Poisson του Παραδείγματος 3, δηλαδή $f(j) = P(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$.

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{j=1}^{\infty} j\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j}{(j-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{(i)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda \\
\Rightarrow E(X) = \lambda,
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$.

Παράδειγμα 9: Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή $f(j) = P(X = j) = p(1-p)^j$. Υπολογίστε την $E(X)$.

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{j=0}^{\infty} jp(1-p)^j = p(1-p)\sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j-1} \\
&= -p(1-p)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{d}{dp}[(1-p)^j] = -p(1-p)\frac{d}{dp}\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j
\end{aligned}
$$

Αλλά $\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j = 1/p$, οπότε

$$E(X) = -p(1-p)\frac{d}{dp}(1/p) = (1-p)/p.$$

Παράδειγμα 10: Υποθέτουμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει ομοιόμορφη πυκνότητα στο διάστημα (a, b), δηλαδή $f(x) = c$ (c σταθερά) για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(x) = 0$ για $x \leq a$ και $x \geq b$. Τότε,

$$E(X) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Παράδειγμα 11: Η πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υπολογίστε τη μέση τιμή της X.

Έχουμε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Ροπές, διασπορά, τυπική απόκλιση τυχαίων μεταβλητών

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, και $r \geq 0$ ακέραιος. Ονομάζουμε **ροπή τάξης** r της X τη μέση τιμή της μεταβλητής X^r (αν υπάρχει, αν δηλαδή είναι πεπερασμένη). Αν η X έχει ροπή τάξης r, τότε η ροπή τάξης r της $(X - \mu)$, όπου μ η μέση τιμή της X, λέγεται **κεντρική ροπή τάξης** r της X. Έτσι, η ροπή τάξης r και η κεντρική ροπή τάξης r για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \sum_{j=1}^{n} x_j^r f(x_j), \\ E[(X-\mu)^r] &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^r f(x_j). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, η ροπή τάξης r προσδιορίζεται πλήρως από την πυκνότητα f της τυχαίας μεταβλητής. Μπορούμε λοιπόν να μιλάμε για τη ροπή τάξης r και την κεντρική ροπή τάξης r της f. Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, οι παραπάνω σχέσεις τροποποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx, \\ E[(X-\mu)^r] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x) \end{aligned}$$

Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει ροπή τάξης r, τότε η X έχει ροπή κάθε τάξης k με $k \leq r$.

Γενικά, όσο περισσότερες ροπές της X γνωρίζουμε, τόσο περισσότερες πληροφορίες έχουμε αποκτήσει για την πυκνότητα της X. Στις εφαρμογές το μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι δύο πρώτες ροπές. Προσέξτε ότι η ροπή πρώτης τάξης ($r = 1$), είναι απλώς η μέση τιμή της X. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη δεύτερη ροπή ($r = 2$). Τότε, η **διασπορά** ή **διακύμανση** ή **μεταβλητότητα** της X, η οποία συμβολίζεται με $\mathrm{Var(X)}$ ή $(\Delta X)^2$ ή $\sigma^2(X)$, ή απλά σ^2, ορίζεται από την

$$\mathrm{Var(X) = E[(X - E(X))^2]}.$$

Προφανώς η διασπορά είναι μη αρνητικός αριθμός, και δείχνει πόσο ¨απλωμένη¨ είναι η κατανομή της πιθανότητας. Είναι δηλαδή ένα μέτρο του πόσο διασπαρμένες είναι οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής γύρω από τη μέση τιμή της, μ. Αν οι διάφορες δυνατές τιμές της X είναι συγκεντρωμένες κοντά στη μέση τιμή μ τότε η διασπορά $\sigma^2(X)$ είναι μικρή, διαφορετικά είναι μεγάλη. Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς λέγεται **τυπική**

απόκλιση και συμβολίζεται συχνά με ΔX ή $\sigma(X)$ ή σ. Σημειώστε ότι αν η X εκφράζεται σε κάποιες φυσικές μονάδες, τότε η τυπική απόκλιση σ εκφράζεται στις ίδιες μονάδες. Από τον ορισμό της, οι σχέσεις που δίνουν τη διασπορά μιας διακριτής ή συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$\sigma^2(X) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu)^2 f(x_j)$$
$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu)^2 f(x)$$

αντίστοιχα.

Παράδειγμα 12: Υπολογίστε τη διασπορά σ^2 και την τυπική απόκλιση σ της πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} .$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι $\mu = 4/3$. Έτσι,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 f(x)dx = \int_0^2\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{2}xdx = \frac{4}{9},$$

οπότε $\sigma = 2/3$.

Παρακάτω δίνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες της διασποράς για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y.

α) $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$.

β) $\text{Var}(cX) = c^2\text{Var}(X)$, όπου $c =$σταθερά.

γ) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

δ) Αν X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

όπου μ_X και μ_U η μέση τιμή της X και Y, αντίστοιχα.

Η ποσότητα $E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ λέγεται **συνδιασπορά** ή **συνδιακύμανση** ή **συμμεταβλητότητα** των τυχαίων μεταβλητων X και Y, και συμβολιζεται με σ_{XY} ή $\text{Cov}(X, Y)$. Δηλαδή

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$

Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε $\sigma_{XY} = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Για X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες μη μηδενικές διασπορές, ο λεγόμενος **συντελεστής συσχέτισης** ορίζεται από την

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

Ο συντελεστής συσχέτισης μας δίνει ένα μέτρο για το βαθμό εξάρτησης ανάμεσα στις δύο τυχαίες μεταβλητές. Λέμε ότι οι δύο τυχαίες μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες αν $\rho = 0$. Αφού $\sigma_{XY} = 0$ όταν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, βλέπουμε αμέσως ότι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές είναι πάντα ασυσχέτιστες. Είναι δυνατόν όμως δύο εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές να είναι επίσης ασυσχέτιστες. Για τις εφαρμογές στη Στατιστική είναι σημαντικό να ξέρουμε ότι ο συντελεστής ρ παίρνει πάντα τιμές μεταξύ -1 και 1.

Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστεί η σταθερά c ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

   να είναι συνάρτηση πυκνότητας. Υπολογίστε τη συνάρτηση κατανομής για την τυχαία μεταβλητή της οποίας η f είναι συνάρτηση πυκνότητας. Κατόπιν υπολογίστε την $P(1 < X < 2)$.

2. Ένα νόμισμα ρίχνεται τρεις φορές. Αν η τυχαία μεταβλητή Z παριστάνει το πλήθος των αποτελεσμάτων Κ, τότε βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας και κατανομής της Z και παραστήστε τις γραφικά.

3. Μια τυχαία μεταβλητή Y έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(y) = \begin{cases} cy^2, & 1 \le y \le 2 \\ cy, & 2 \le y \le 3 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

   Να υπολογιστούν: α) η σταθερά c, β) οι πιθανότητες $P(Y > 2)$ και $P(\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2})$.

4. Υποθέστε ότι διαλέγετε τυχαία έναν πραγματικό αριθμό X από το διάστημα [2,10].

   α) Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ και την πιθανότητα ενός γεγονότος A για το πείραμα αυτό, όπου A είναι ένα υποδιάστημα $[a, b]$ του [2,10].

   β) Από το (α), βρείτε τις πιθανότητες $P(X > 5)$, και $P(5 < X < 7)$.

5. Υποθέστε ότι διαλέγετε έναν πραγματικό αριθμό X από το διάστημα [2,10], με μιά συνάρτηση πυκνότητας της μορφής

$$f(x) = c\,x,$$

   όπου c είναι μιά σταθερά.

   α) Βρείτε το c .

   β) Βρείτε την $P(A)$, όπου $A = [a, b]$ είναι ένα υποδιάστημα του [2,10].

   γ) Βρείτε τις $P(X > 5)$ και $P(X < 7)$.

6. Λύστε το προηγούμενο πρόβλημα με $f(x) = c/x$.

7. Υποθέστε ότι παρατηρείτε μια ραδιενεργό πηγή η οποία εκπέμπει σωμάτια με ρυθμό που περιγράφεται από την εκθετική συνάρτηση πυκνότητας

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

όπου $\lambda = 1$, έτσι ώστε η πιθανότητα $P(0, T)$ το σωματίδιο να εμφανιστεί στα επόμενα T δευτερόλεπτα είναι

$$P([0, T]) = \int_0^T \lambda \, e^{-\lambda t} \, dt.$$

Βρείτε την πιθανότητα ένα σωματίδιο (όχι απαραίτητα το πρώτο) να εμφανιστεί

α) εντός του επόμενου δευτερολέπτου,

β) εντός των επόμενων τριών δευτερολέπτων,

γ) μεταξύ του τρίτου και τέταρτου δευτερολέπτου από τώρα,

δ) μετά από τέσσερα δευτερόλεπτα από τώρα.

8. Διαλέξτε έναν αριθμό B τυχαία από το διάστημα $[0, 1]$ με ομοιόμορφη πυκνότητα. Βρείτε την πιθανότητα

α) $P(1/3 < B < 2/3)$.

β) $P(B < 1/4$ ή $1 - B < 1/4)$.

9. Μια τυχαία μεταβλητή έχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{c}{x^2 + 1},$$

όπου $-\infty < x < \infty$. (α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c. (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(1/3 < X^2 < 1)$. (γ) Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής για τη δοσμένη $f(x)$.

10. Η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Βρείτε (α) την πυκνότητα, (β) την πιθανότητα $P(X > 2)$, και (γ) την πιθανότητα $P(-3 < X \leq 4)$.

14. Η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$F(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Εάν $P(X = 3) = 0$, να βρεθούν (α) η σταθερά c, (β) η πυκνότητα, (γ) οι πιθανότητες $P(X > 1)$, $P(1 < X < 2)$.

11. Μπορεί η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} c(1 - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

να παριστάνει συνάρτηση κατανομής; Γιατί;

12. Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή έχει πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{για } x > 0 \\ 0, & \text{για } x \leq 0. \end{cases}$$

Να υπολογιστούν

α) η μέση τιμή της X,

β) η μέση τιμή της X^2, και

γ) η διασπορά και η τυπική απόκλιση της X.